UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE INGENIERÍA
Ingeniería Catastral y Geodesia

Relatividad en la Transformación de Sistemas de Referencia Convencionales.

John F. Aguilar S[1] Edilberto Suárez
Semillero de AstroIngeniería
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

AstroIngenieríA
Semillero de Investigación

nide
núcleo de investigación en datos espaciales

Resumen

Presentamos los resultados de los avances en el semillero de investigación AstroIngeniería de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, en relación al establecimiento de una nueva linea de investigación en el área de sistema de referencia. Estas consideraciones se enmarcan dentro de las resoluciones de la IAU y son el punto de partida para futuros estudios sobre el formalismo PPN de N cuerpos mediante el uso de las N+1 cartas coordenadas y del ajuste entre la carta coordenada global y las N cartas locales para cada cuerpo; dentro del marco de la nueva teoría se discute su implementación y uso en la definición de los sistemas de referencia baricéntrico y geocéntrico de acuerdo con las resoluciones B1.3 y B1.4 adoptadas por la IAU.

Palabras claves: Relatividad, métrica, Resolución IAU, Transformación de coordenadas.

Introducción

La Unión Astronómica Internacional (IAU) acordó definir a partir de 2003, nuevos sistemas de referencia que estén acorde a las modernas técnicas de observación que permiten hacer una rigurosa materialización de las direcciones de los ejes en las distintas épocas. Estas referencias involucran sistemas de posicionamiento astronómico como al geodésico y a la rotación terrestre, que forman parte del conjunto de resoluciones que en el año 2000 acordó la IAU en la XXIV Asamblea General celebrada en Manchester. Estas resoluciones incluyen también un nuevo modelo para el estudio en bloque del movimiento de precesión y nutación, así como algunas recomendaciones relativas a las escalas de tiempo terrestre y tiempo universal, al potencial de gravedad, entre otros temas de aplicación en la geodesia que involucran correcciones a partir del establecimiento del sistema de referencia celeste Baricéntrico, el cual se adopta como el mas apropiado para las efemérides de los objetos del sistema solar para los cuales se toman correcciones basadas en la curvatura del espacio tiempo que es explicada por la relatividad general.

La teoría moderna de la gravitación es la teoría de la relatividad general postulada por Albert Einstein a fines de 1915. De acuerdo a esta teoría la gravitación no es una fuerza, sino una manifestación de la "curvatura" del espacio-tiempo. Un objeto masivo produce una distorsión en la geometría del espacio-tiempo, y a su vez esta distorsión controla o altera el movimiento de los objetos. Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales en 4 dimensiones, acopladas y no lineales. Las ideas principales que guiaron a Einstein en su camino hacia la relatividad general fueron el llamado "principio de equivalencia", que dice que todos los objetos caen exactamente de la misma forma en un campo gravitacional, y el "principio de Mach", que dice que la inercia local de un objeto debe ser producida por la distribución total de la materia en el Universo. El principio de equivalencia llevó a Einstein a concluir que la gravedad debía identificarse con la geometría del espacio- tiempo, y el principio de Mach lo llevó a concluir que dicha geometría debería ser alterada por la distribución de materia y energía. Matemáticamente esto quiere decir que la teoría de la gravedad debería ser lo que se conoce como una "teoría métrica", en la cual la gravedad se manifiesta única y exclusivamente a través de una distorsión en la geometría del espacio-tiempo. Allí, se considera un espacio-tiempo de cuatro dimensiones (tres de espacio y una de tiempo). Sean x^α las coordenadas de un evento en este espacio-tiempo, donde el índice toma los valores {0,1,2,3}: cuatro números que indican en que momento del tiempo, y en que lugar en el espacio ocurre ese evento. Entre dos eventos infinitesimalmente cercanos con coordenadas x^α y $x^\alpha + dx^\alpha$ es posible definir una "distancia invariante" ds^2.de la siguiente forma:

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Las transformaciones de Lorentz garantizan que el intervalo ds^2 tiene el mismo valor para cualquier observador. Esto es consecuencia directa del postulado de la invariancia de la velocidad de la luz. Nótese que debido a la presencia de un eigenvalor negativo, la "distancia invariante" no es positiva definida. Uno puede distinguir entre eventos relacionados entre sí de 3 formas distintas:

$ds^2 > 0$ Intervalo espacial,
$ds^2 < 0$ Intervalo temporal,
$ds^2 = 0$ Intervalo nulo.

En relatividad especial, los objetos se mueven en líneas rectas en ausencia de fuerzas externas, la línea recta corresponde a una trayectoria de longitud extrema de acuerdo a la métrica de Minkowski (no necesariamente de longitud mínima debido al signo negativo de uno de los eigenvalores). Einstein postuló que en la presencia de un campo gravitacional, los objetos aún se mueven siguiendo las trayectorias más rectas posibles, es decir, trayectorias extremas, pero ahora en un espacio-tiempo curvo. A esa trayectoria extrema se le llama "geodésica". De esta forma, la gravedad no se ve como una fuerza externa, sino como una distorsión de la geometría. Dada esta distorsión, los objetos se mueven simplemente siguiendo una geodésica.

Se acostumbra parametrizar la trayectoria de un objeto utilizando el llamado "tiempo propio" $d\tau^2 := -ds^2$, que corresponde al tiempo medido por el objeto mismo (el tiempo que mide un reloj ideal atado al objeto). Nótese que este tiempo no tiene por que ser igual a dt , pues t es sólo una coordenada, es decir, una etiqueta arbitraria que asignamos a diferentes eventos. La ecuación para una geodésica está dada en general por

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \cdot \frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0,$$

Donde las cantidades $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ se conocen como "símbolos de Christoffel" y están definidos por

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} := \frac{g^{\alpha\mu}}{2}\left[\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}\right]$$

La ecuación geodésica puede escribirse también como

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\mu^\beta \mu^\gamma = 0$$

Curvatura

la métrica espacio plano en coordenadas esféricas (r, θ, φ) es de la forma

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (1)$$

donde la transformación de coordenadas es de la forma

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

lo que implica

$$dx = drsen\theta cos\phi - rsen\theta sen\phi d\phi + rcos\theta cos\phi d\theta$$
$$dy = drsen\theta sen\phi - rsen\theta cos\phi d\phi + rcos\theta sen\phi d\theta$$
$$dz = drcos\theta - rsen\theta d\theta$$

A partir de la métrica (1) es posible calcular los símbolos de Christoffel para las coordenadas esféricas y ver que la ecuación de una linea recta escrita en estas coordenadas ya no es trivial. Llevando a cabo tranformaciones de coordenadas aún más elaboradas es posible terminar con una métrica mucho más compleja. La manera de hacer esto es a través del llamado "tensor de curvatura de Riemann" el cual esta definido por

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} := \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \left(\Gamma^\alpha_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu}\right)$$

Nótese que el tensor de Riemann tiene 4 índices, es decir, 4×4×4×4=256 componentes. Sin embargo, tiene muchas simetrías, por lo que solamente tiene 20 componentes independientes. Es posible demostrar que el tensor de Riemann es igual a cero si y sólo si el espacio-tiempo es plano. A partir del tensor de Riemann podemos definir el llamado "tensor de Ricci"como

$$R_{\mu\nu} := \sum_\lambda R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$$

El hecho de que el tensor de Ricci sea cero no significa que el espacio sea plano. Los tensores con índices arriba o abajo no son iguales, pero están relacionados entre sí. La regla es la siguiente: los índices de objetos geométricos se suben y bajan contrayendo con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ o su inversa $g^{\mu\nu}$.

Ecuaciones de Einstein

La teoría de la gravitación de Einstein es aquel que nos dice cómo se relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía. Las ecuaciones de Einstein tienen la forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el "tensor de Einstein" que esta relacionado con el tensor de curvatura de Ricci, y $T_{\mu\nu}$ es el "tensor de energía-momento" de la materia. Es decir, el lado izquierdo representa la geometría del espacio-tiempo y el lado derecho la distribución de materia y energía. El tensor de Einstein se define en términos del tensor de Ricci como

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

con $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ la traza del tensor de Ricci, también llamada el "escalar de curvatura". La segunda parte de las ecuaciones de Einstein, el tensor de energía-momento, describe la densidad de energía, la densidad de momento y el flujo de momento de un campo de materia (*i, j = 1, 2, 3*):

Condiciones de coordenadas

El tensor $G_{\mu\nu'}$ (simétrico) tiene 10 componentes independientes 4 para $\mu = \nu$; 3 para μ = 0, ν = 1, 2, 3, 2 para ν = 1 ν= 2, 3 y 1 para μ = 2 ν = 3, entonces las ecuaciones de campo se reducen a 10 ecuaciones independientes. El tensor métrico también tiene 10 componentes, luego, en principio se pierde pensar que las ecuaciones de campo (con condiciones de frontera adecuadas) son suficientes para determinar $g_{\mu\nu}$ unívocamente. Sin embargo, lo anterior no sucede, pues las 10 componentes de $G_{\mu\nu'}$ no son independientes si no están relacionadas por las identidades de Bianchi.

$$G^\mu_{\nu;\mu} = 0$$

Por lo tanto 4 condiciones diferenciales adicionales pueden ser impuestas sobre el tensor métrico $g_{\mu\nu'}$. Los 4 grados de libertad correspondientes al hecho que si $g_{\mu\nu}$ es solución de las ecuaciones de campo, entonces también lo es $g'_{\mu\nu'}$ que se determina a partir de $g_{\mu\nu}$ por una transformación general de coordenadas $x \to x'$. Tal transformación involucra 4 funciones arbitrarias $x'^\mu(x)$. Si las condiciones de las coordenadas el tensor métrico no puede ser determinado unívocamente de las ecuaciones de campo de Einstein pues aun existirá la libertad de la transformación de coordenadas la cual incluye la 4 funciones arbitrarias. El análogo Maxwelliano es el problema de determinar el vector potencial Aμ unívocamente. Las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho \; \nabla \times B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J$$
$$\nabla \times E + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \; \nabla \cdot B = 0$$

De las cuales se pueden desprender 4 ecuaciones que no son funcionalmente independientes pues

$$\nabla \cdot (\nabla \times B) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot t = \frac{4\pi}{c}\nabla \cdot J$$
$$\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\nabla \cdot J = 0 \frac{\partial \rho}{\prod t} + \nabla \cdot J = 0$$

Luego

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\Box A^\alpha - \frac{\partial^2 A^\beta}{\partial x_\alpha \partial x^\beta}\right) = 0$$

El grado de libertad proporcional corresponde a la invarianza gauge; dado cualquier A^α existe otra solución tal que

$$A'^\alpha = A^\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}$$

con $-\partial\phi = \frac{-\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha}$ que es el grupo de Lorentz. Esta condición mas las ecuaciones de Maxwell, completa el sistema de 4 ecuaciones con una condición de frontera adecuada que determina unívocamente A^α. De forma análoga se puede eliminar la ambigüedad adoptando un sistema de coordenadas particular. La elección se puede expresar en 4 condiciones coordenadas que sumadas a las 6 ecuaciones de campo, determinan la solución unívocamente.

La divergencia de V^ν es el invariante definido como

$$\Box\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\partial_\mu \phi\right)$$

De donde se define el tensor asociado a el d′Alambertiano, entonces

$$\Box\phi = g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\alpha \frac{\partial\phi}{\partial c^\alpha}$$

Podemos ver que un sistema de coordenadas en el cual x^0, x^1, x^2, x^3 son solución de la ecuación $\Box\phi = 0$, entonces $\Gamma^\alpha = 0$. Las coordenadas de este tipo son llamadas armónicas. La condición armónica es

$$\Gamma^\alpha = g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$$

Conclusiones

En estas notas se ha presentado una introducción a la relatividad, partiendo de una breve discusión de los principios fundamentales de la relatividad general necesarios para definir un sistema de coordenadas como el que tuvo en cuenta la unión astronómica internacional (IAU) para definir los sistemas de coordenadas celestes los cuales son de utilidad para corregir las observaciones realizadas con técnicas como la interferometría de muy larga base que se usa .

Bibliografía

C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, Gravitation. (San Francisco: W. H. Freeman, 1973).
B. Schutz, A First Course in General Relativity. (Cambridge University Press, 1985).
R. M. Wald, General Relativity. (Chicago: The University of ChicagoPress,1984).
J .Winicour,LivingReviewsinRelativity,1(1998).
Kaplan, George H. 2005. «The IAU resolutions on astronomical reference systems, time scales, and earth rotation models : explanation and implementation». U.S. Naval Observatory Circulars 179.

SISTEMA DE REFERENCIA GEOCÉNTRICO PARA LAS AMÉRICAS
Subcomisión 1.3b de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG)
Proyecto de la Comisión de Cartografía del Instituto Panamericano de Geografía e Historia (IPGH)