

1. Introducción

En Costa Rica, al igual como en la gran mayoría de los países latinoamericanos, muchos de los bancos de nivel cuentan además con la coordenada de altura elipsoidal determinada por mediciones GNSS, y en muchas ocasiones dichos datos procesados de manera estricta con software científico.

En este trabajo se tomaron una serie de puntos distribuidos por todo en Costa Rica, y de los cuales se conoce por un lado el valor de la altura nivelada según los registros del Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica (IGNCR) y los correspondientes valores reportados para alturas elipsoidicas. Estos datos fueron proporcionados básicamente por cuatro diferentes fuentes: el Instituto Costarricense de Acueductos y Alcantarillados (AYA), la Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia (ETCG) de la Universidad Nacional, el Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica (IGNCR), la Escuela de Ingeniería Topográfica y la Escuela Centroamericana de Geología, ambas de la Universidad de Costa Rica (UCR). En total se logró recopilar 245 puntos cuya ubicación se puede ver en la figura 1.

Partiendo de la relación entre la altura nivelada y la altura elipsoidal, se tomaron las diferencias de estas coordenadas altimétricas una aproximación del valor de la ondulación del geode para cada uno de los puntos. Luego se calcularon las ondulaciones del geode para cada uno de los puntos con base en los modelos EGM08, EIGEN-6C4, SSG-UGM-1 y EIGEN-GRACE disponibles en el International Centre for Global Earth Models (ICGEM) (icgem,2019). Estos resultados se usaron para determinar el grado de compatibilidad entre la estimación directa de la ondulación (Gucek and Basic, 2009) y (Ligas and Banasik, 2012) y determinar cuáles puntos eventualmente presentan diferencias significativas.

Finalmente, luego de un proceso de selección, se calcularon los coeficientes de polinomio para el valor aproximado de la ondulación y analizar su correspondencia con el resto de puntos.

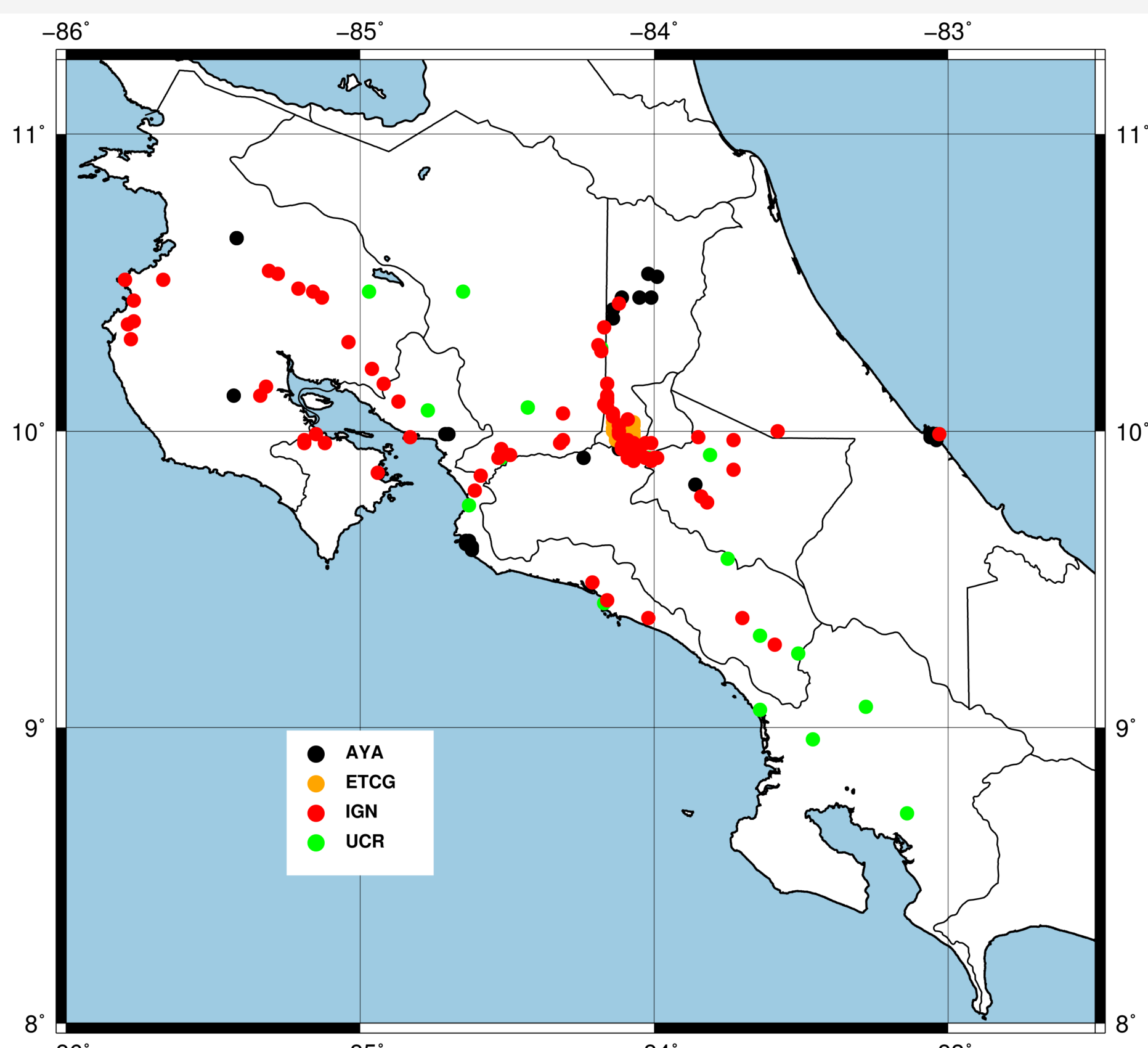


Figura 1. Localización geográfica de los 245 seleccionados

2. Metodología

La metodología de trabajo consistió en asumir como valor de partida la diferencia entre la altura nivelada (H) y la altura elipsoidal (h) para cada uno de los 245 puntos. Este resultado se tomó como una primera aproximación al valor de la ondulación del geode (N) en cada uno de los vértices. Luego, se obtuvieron los valores correspondientes para cada uno de los modelos citados (ver gráfico 1). Este gráfico se generó en la variante de acumulación de serie para dar una idea de comportamiento, además se consideró un orden en sentido este - oeste para la ubicación de los puntos. Luego, estos valores se compararon con los que se determinaron por la comparación directa de las dos alturas, cuyo resultado se puede ver en el gráfico 2.

Después, se calcularon las diferencias de los valores dados por el modelo respecto a los calculados de forma directa. De esta comparación, se hizo una primera selección de los datos descartando aquellos puntos cuyas diferencias estuvieran fuera de una tolerancia inicial de ± 1 m. Bajo este criterio se descartaron un total de 45 puntos quedando solamente un total de 200 puntos.

Adicionalmente, se descartaron todos los datos de EIGEN-GRACE debido a que desde el inicio se nota un comportamiento, que si bien es similar al resto de datos de forma relativa, presenta una diferencia sistemática respecto a los valores directos como a los valores de los otros modelos (ver gráfico 1 y gráfico 2). Por otro lado, en el gráfico 3 se muestran las diferencias de los modelos respecto al resultado calculado de forma directa (comparación de alturas).

Posteriormente, se seleccionaron de forma aleatoria un conjunto de puntos, de los cuales se tomaron los resultados de la ondulación obtenidos de forma directa, como los insumos principales para el cálculo por medio de mínimos cuadrados, de los coeficientes del polinomio de mejor ajuste. Este proceso se efectuó de manera iterativa, descartando puntos en cada una de las corridas de la rutina.

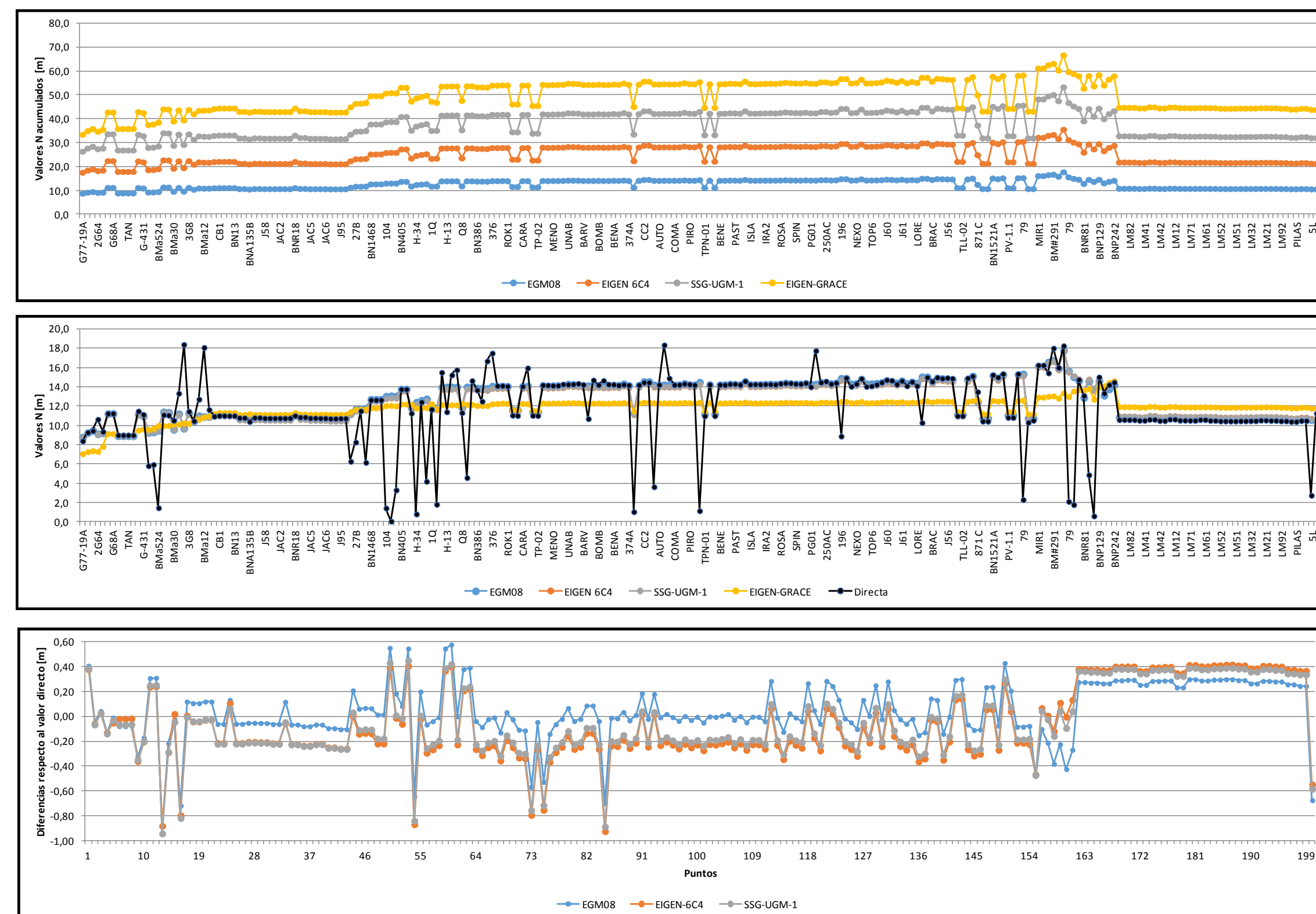


Gráfico 1. Comportamiento de los valores de ondulación para cada uno de los cuatro modelos. El gráfico está generado de forma tal que se pueda hacer una comparación entre las diferentes series de datos y los puntos se han dispuesto en sentido este - oeste tratando de representar un perfil longitudinal sobre Costa Rica

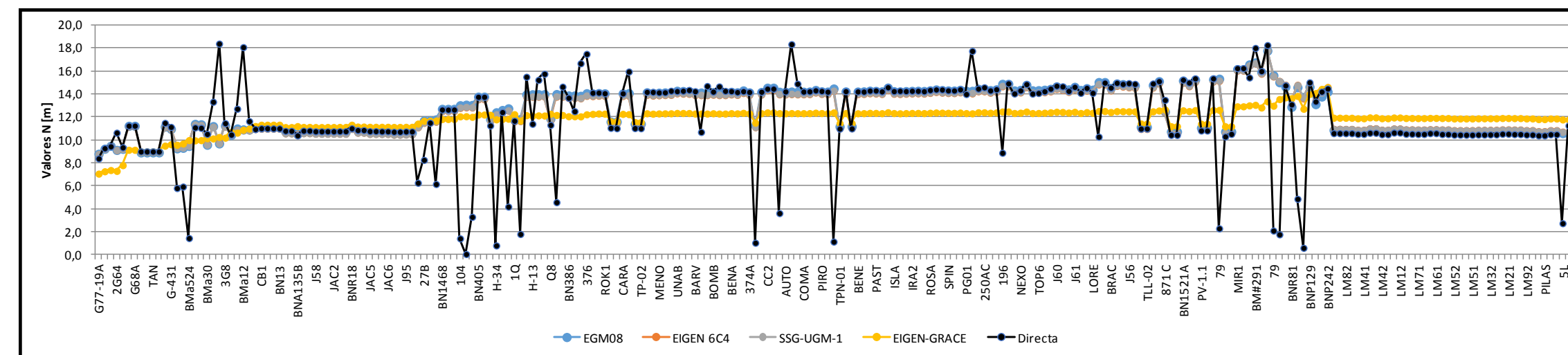


Gráfico 2. Comportamiento de los valores de ondulación de cada uno de los puntos. La distribución de los puntos se ha hecho en sentido este - oeste tratando de representar un perfil longitudinal sobre Costa Rica

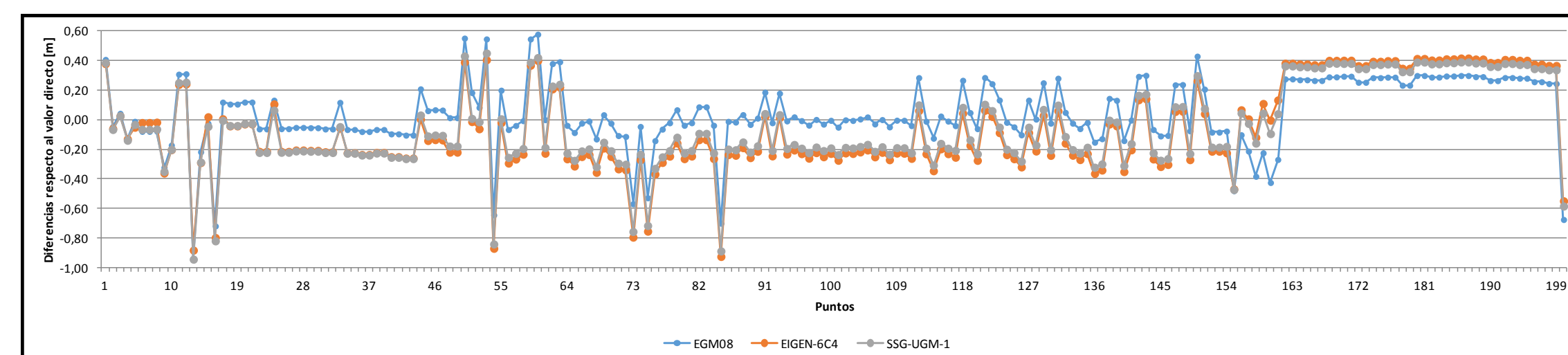


Gráfico 3. Comportamiento de las diferencias de cada uno de los modelos respecto del valor directo aproximado de la ondulación. El valor cero en el eje vertical representa el dato obtenido de manera directa.

3. Cálculo de los polinomios

El comportamiento de una variable se puede aproximar por medio de un polinomio de grado n y en función de su posición (Zhong, 1997). Del conjunto original de 200 puntos se seleccionó de manera aleatoria un subconjunto de prueba de 150 puntos, dejando 50 puntos para el control de los resultados. Se escribió una rutina en MatLab que determina los 15 coeficientes de un polinomio de grado 4.

$$N(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + a_{40}x^4 + a_{41}x^3y + a_{42}x^2y^2 + a_{43}xy^3 + a_{44}y^4$$

$$N(x, y) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{4-i} a_{ij} x^i y^j$$

En la solución de esta relación se considera una matriz de configuración A de tamaño (p x u) con p = cantidad de puntos y con u = cantidad de incógnitas (coeficientes). Se asume además una matriz de pesos identidad P = I. La solución del sistema de ecuaciones está dada por: $x = (A^T A)^{-1} A^T L$, en este caso con L igual a las ondulaciones directas de los puntos seleccionados. En la solución, x es un vector de tamaño (u x 1) y cuyas componentes serán precisamente los valores de los coeficientes. Los parámetros x e y corresponden con las coordenadas reducidas de cada uno de los puntos respecto a las coordenadas del centro de gravedad de cada conjunto puntual. Se asumió como plano cartográfico de referencia el oficial para Costa Rica CRTM05.

El procedimiento de cálculo consideró el análisis de los residuales, descartando aquellos puntos para los cuales no se cumpliera con una tolerancia inicial de ± 2 m. Los resultados se pueden ver en el gráfico 4.

En el primer cálculo (gráfico 4.A) se usaron los 150 puntos y de los resultados se eliminaron 39. En el segunda cálculo se usaron 111 puntos y luego se descartaron 10 puntos (gráfico 4.B). En el tercer cálculo se trabajó con un total de 101 puntos (gráfico 4.C) y se eliminaron 4. En el cuarto cálculo se usó un total 97 puntos (gráfico 4.D) y eliminó un solo punto. Y finalmente el quinto cálculo se hizo con un total de 96 puntos (gráfico 4.E) cuyos residuales cumplieron con la tolerancia establecida.

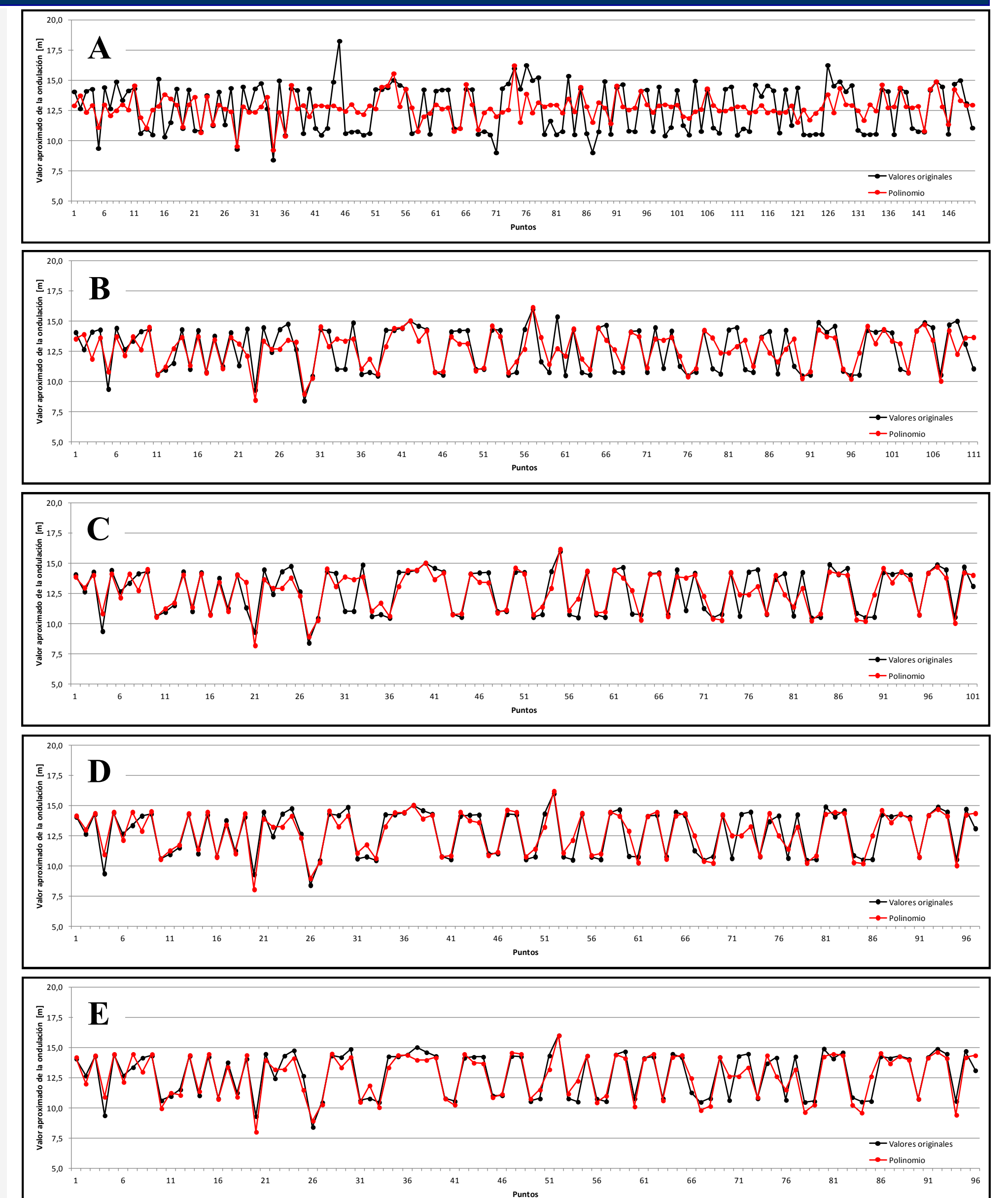


Gráfico 4. En el 4.A se muestra el polinomio de ajuste para el conjunto de original de 150 puntos. En el 4.B está el comportamiento para 111 puntos, mientras que en el 4.C para el conjunto de 101 puntos. En el 4.D se presenta el comportamiento para 97 puntos y en el 4.E para el conjunto final de 96 puntos

4. Resultados

Los diferentes resultados de los coeficientes del polinomio, obtenidos de los procesos de cálculo, se presentan en el cuadro 1, donde se indica además la cantidad de puntos, grados de libertad y desviación estándar a posteriori.

Puntos	150	111	101	97	96
f	135	96	86	82	81
s ₀	1,778	1,235	0,953	0,768	0,735
Coeficientes					
a ₀₀	0,8121	2,7016	3,4196	3,0070	3,2173
a ₁₀	-18,2448	-10,2392	-7,8856	-7,2857	-7,0021
a ₁₁	-10,4107	-14,6143	-15,7320	-17,1910	-17,0354
a ₂₀	8,7767	9,4110	9,8127	10,8678	10,6970
a ₂₁	-38,8713	-29,4750	-26,4278	-26,4929	-25,9587
a ₂₂	12,9938	2,7300	-0,6485	-1,7941	-2,1229
a ₃₀	9,6374	4,9605	4,2124	3,9879	3,9712
a ₃₁	1,3693	5,1935	6,3397	7,5250	7,4750
a ₃₂	-28,9859	-24,7944	-23,8289	-24,8486	-24,3992
a ₃₃	18,4800	13,5678	12,0432	12,1079	11,7814
a ₄₀	-1,9823	-2,5457	-2,7034	-2,8479	-2,7929
a ₄₁	7,8483	4,2265	3,7463	3,6632	3,8123
a ₄₂	-2,4249	-0,0341	0,5177	0,6927	0,4726
a ₄₃	-9,7583	-8,4088	-8,4488	-8,9478	-8,8575
a ₄₄	5,3893	5,0624	5,1043	5,3534	5,2934

Cuadro 1. Resumen de los resultados de cada uno de los 5 procesos de ajuste efectuados para el cálculo de los coeficientes del polinomio de la variable ondulación directa.

5. Conclusiones

- Los resultados derivados de este trabajo, deben considerarse solamente como una aproximación y su objetivo general fue determinar, en primera instancia, el grado de compatibilidad de los valores dados por varios modelos disponibles en correspondencia con una estimación directa de la ondulación del geode para puntos discretos en Costa Rica. A esto se le debe sumar el hecho de que se partió de alturas niveladas que no son realmente alturas ortométricas, por lo que este hecho suma además una componente sistemática que afecta el valor determinado directamente.
- Los resultados de la comparación entre los valores modelados y el valor obtenido de forma directa reveló en primer lugar un grado de coincidencia aceptable para tres de las bases usadas. De ella, se pudo extraer un conjunto de puntos que si bien se escogieron por su "correspondencia" con los valores modelados, no es un criterio totalmente válido ya que no se tiene de momento como hacer una verificación de altura nivelada y de altura elipsoidal reportada. Debe recordarse que los valores de los modelos son derivados de proceso mucho más complejos de interpolación.
- Los resultados del cuadro 1 permitieron estimar con base en los coeficientes del polinomio, diferencias en los 97 puntos de entre -1,7 m y 1,9 m, y para los puntos usados como control las diferencias fueron mayores, del orden de -3,4 m y 4,0 m. Sin embargo, excluyendo los puntos en donde se presentan diferencias superiores a 3 m, los resultados de las discrepancias bajan entre -1,9 m y 2,3 m.
- Los resultados derivados de este estudio no permiten hacer una interpolación para puntos nuevos de los cuales se quiera estimar su altura nivelada. La dispersión obtenida es unos dos metros y aunque para algunas aplicaciones preliminares esta dispersión es suficiente, actualmente se pueda lograr una mejor resolución empleando otras bases de datos. Debe considerarse fundamentalmente también la topografía nacional, que si bien Costa Rica es un país pequeño en extensión, presenta grandes cambios en relativa poca distancia; además el polinomio se determinó con base en la distancia entre los vértices y la distribución de los mismos respondió a un proceso aleatorio de selección de los mismos. Con relación a lo anterior, puede trabajarse eventualmente definiendo zonas más pequeñas y cuya distribución de puntos sea más adecuada, así como también probando diferentes grados del polinomio.

Referencias:

- Gucek, M and T. Basic. (2009). Height transformation models from ellipsoidal into the normal orthometric height system for the territory of the city of Zagreb. Stud. Geophys. Geod., 53, 17-38
- Ligas, M. and P. Banasik. (2012). Local height transformation through polynomial regression. Geodesy and Cartography. Vol. 61, No 1, 2012, pp. 3-17
- Zhong, D. (1997). Robust estimation and optimal selection of polynomial parameters for the interpolation of GPS geoid heights. Journal of Geodesy 71: 552