

## Fractalidad del Contenido Total de Electrones - TEC

Alfonso Tierra

Grupo de Investigaciones en Tecnologías Espaciales. Centro de Investigaciones Científicas. Universidad de la Fuerzas Armadas- ESPE. Av. Gral Rumiñahui. Sangolquí, Ecuador. artierra@espe.edu.ec

### RESUMEN

Cuando a finales del siglo XX Benoit Mandelbrot presentó su primer ensayo sobre los objetos fractales, pocos preveían la influencia que esta nueva concepción de la geometría iba a tener sobre las ciencias. Los fractales cambiaron la concepción de la geometría clásica o euclidiana, a una conocida como geometría fractal naciendo como una alternativa para interpretar y representar de manera más precisa diferentes formas de la naturaleza. Además, existen fenómenos, que para poder investigarlos o estudiarlos se toman datos en diferentes tiempos. Los datos así obtenidos se constituyen en una serie temporal de una variable del sistema que lo caracteriza. Estudiando la variación temporal de esta variable, se puede determinar su comportamiento, su funcionamiento, e incluso se podría llegar a hacer estimaciones o predicciones para un futuro. En este trabajo, se pretende mostrar la posibilidad de que la teoría de la geometría fractal podría ser aplicada como una alternativa para estudiar el comportamiento de la actividad de la ionosfera, para lo cual se determina inicialmente, mediante la estimación de la dimensión fractal de la serie temporal del Contenido Total de Electrones – TECU, si tiene un comportamiento Fractal. Para calcular los TECU, se utilizaron los datos observados de una estación de monitoreo continuo y se calcularon los TECU en la dirección de la señal entre receptor y Satélite. Los TECU fueron determinados en base, a los valores de las falsas distancias de los satélites GPS, de las frecuencias respectivas de las dos portadoras, y cada dos horas durante un mes. A partir de la serie, se calculó el coeficiente de Hurst utilizando la técnica de Análisis de Rango Reescalado (R/S), y posteriormente se determinó la dimensión fractal. Los primeros resultados obtenidos indican que la dimensión fractal de la serie temporal de los TECU es mayor que 1, y se podría afirmar en primera instancia que los TECU es un FRACTAL.

### CONTENIDO TOTAL DE ELECTRONES (TEC)

El TEC representa la cantidad de electrones por metro cuadrado ( $\text{el}/\text{m}^2$ ) presentes en la ionosfera a lo largo de la trayectoria entre el receptor y el satélite. El TECU se define como  $10^{16} (\text{el}/\text{m}^2)$  (Seeber, 1993).

El TEC puede ser calculado a partir de las observaciones de medidas de falsa distancia obtenidas del rastreo a los satélites GPS con equipos de doble frecuencia, mediante la siguiente expresión Zhizhao Liu-Yang Gao (2004):

$$TEC = \frac{f_1^2 f_2^2 (R_1 - R_2)}{40.3 (f_2^2 - f_1^2)} \quad (01)$$

Donde:  $f_1, f_2$  Son las frecuencias de las portadoras  $L_1, L_2$  respectivamente  
 $R_1, R_2$  Son las Falsas distancias de las portadoras  $L_1, L_2$  respectivamente

### DIMENSIÓN FRACTAL

Cuando a finales del siglo XX Benoit Mandelbrot presentó su primer ensayo sobre los objetos fractales, pocos preveían la influencia que esta nueva concepción de la geometría iba a tener sobre las ciencias. La figura 1, muestra el fractal de Mandelbrot. El fractal es un objeto geométrico de estructura irregular aparentemente caótica. Estos objetos se pueden encontrar en muchos fenómenos naturales, así como en las diferentes formas que se pueden encontrar en la naturaleza, ver figura 2. Los fractales cambiaron la concepción de la geometría clásica o euclidiana, a una conocida como geometría fractal naciendo como una alternativa para interpretar y representar de manera más precisa diferentes formas de la naturaleza. Estas figuras se encuentran compuestas por una curva infinita para definir su superficie finita, como mostrada en la figura 3. En la Figura 4, se presenta el valor de las dimensiones fractales como las Euclidianas



Figura 1. Fractal de Mandelbrot



Figura 2. Fractales Naturales

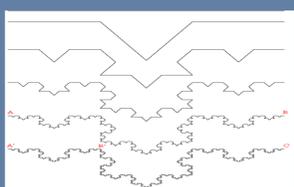


Figura 3. Fractal capa de nieve

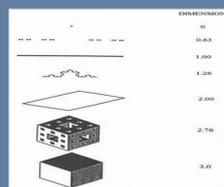


Figura 4. Dimensiones

### COEFICIENTE DE HURST (H)

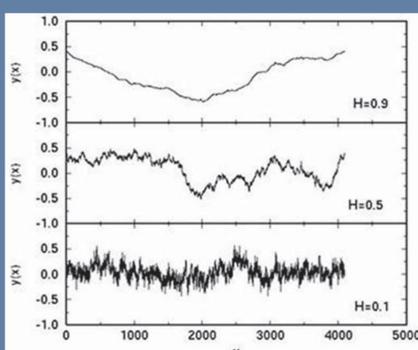


Figura 5. Series temporales  
Fuente: Quintero, Ruiz, 2011

En la figura 5, se muestra algunos comportamientos de fenómenos en función del tiempo, y de acuerdo al valor de Hurst (H), se puede interpretar de la siguiente manera (Scafetta, 2010) (Gao et al, 2007):

Si  $0.5 < H \leq 1$ , implica procesos persistentes (un periodo de crecimiento es seguido de otro análogo).

Si  $H = 0.5$ , implica un proceso aleatorio e independiente.

Si  $0 \leq H < 0.5$ , implica un comportamiento anti-persistente en la serie de tiempo (es decir un periodo de crecimiento es seguido de otro de decrecimiento)

### METODOLOGÍA

A partir de la ecuación (01) se calculó los valores de TECU y se obtuvo su serie temporal como mostrado en la figura 6. Posteriormente, para el cálculo de la dimensión fractal se realizó de la siguiente manera:

1. Hacer submuestras comenzando con la totalidad de la muestra (n). Para cada submuestra calcular la media y la desviación estándar (S)
2. Calcular los residuos y el rango (R) de cada submuestra
3. Obtener el rango escalado (R/S) en cada submuestra
4. Calcular el  $\log(n)$  y el  $\log(R/S)$
5. Realizar el ajuste por mínimos cuadrados la regresión lineal
6. La pendiente de la recta ajustada es el coeficiente de HURST (H)
7. La dimensión Fractal puede ser calculada por:  $DF = 2 - H$  (Feder, 1988)

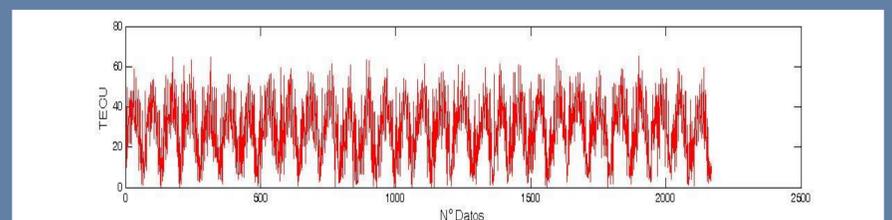


Figura 6. Serie Temporal del TECU

### RESULTADOS

En la figura 7, se puede observar la recta (color rojo) obtenida de la regresión lineal ajustada a 20 submuestras (cruces de color azul) de acuerdo a la ecuación (02). La recta en azul indica que el  $H = 0.5$ .

$$Y = 0.27x + 0.90 \quad (02)$$

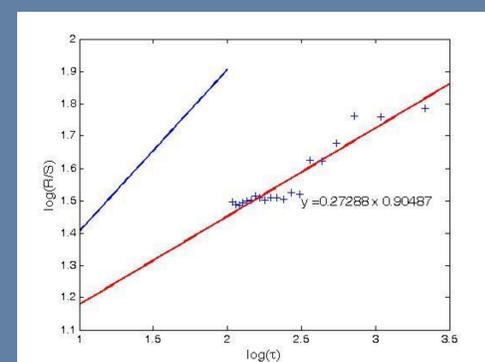


Figura 7. Regresión Lineal de las submuestras

De la ecuación (02), la pendiente me da el valor del coeficiente de Hurst

$$H = 0.27$$

Por lo tanto la Dimensión Fractal de la serie temporal del TECU es

$$DF = 1.73$$

### CONCLUSIONES

- La serie temporal del TECU tiene un comportamiento **ANTIPERSISTENTE**.
- La serie temporal del TECU es un **FRACTAL** con dimensión 1.73

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Feder, J. Fractals. New York: Plenum Press, 1988.
- Gao, J; Cao, Y; Tung, W; Hu, J. Multiscale Analysis of Complex Time Series. Wiley. New Jersey, 2007.
- Quintero, O; Ruiz, J. Estimación del Exponente de Hurst y la Dimensión Fractal de una Superficie Topográfica a través de la Extracción de Perfiles. 2011
- Scafetta, N. Fractal and Diffusion Entropy Analysis of Time Series VDM Verlag. USA, 2010.
- Seeber, G. Satellite Geodesy. Walter de Gruyter. Berlin, 1993.
- Zhizhao, L; Yang, G. GPS Solutions, 2004.