



GOBIERNO  
DE COLOMBIA

IGAC  
INSTITUTO GEOGRÁFICO  
AGUSTÍN COSSAQUE



# GEODESIA



Subdirección de Geografía y Cartografía

# **MODELADO GEOIDAL PARA LA ZONA NORTE DE COLOMBIA: PROPUESTA METODOLÓGICA**

**ANDERSON LEAL VELEZ  
FRANCISCO JAVIER SARMIENTO PARRA  
SAMUEL ANDRÉS PÉREZ CASTIBLANCO**

**Grupo Interno de Trabajo de GEODESIA**

## Contenido

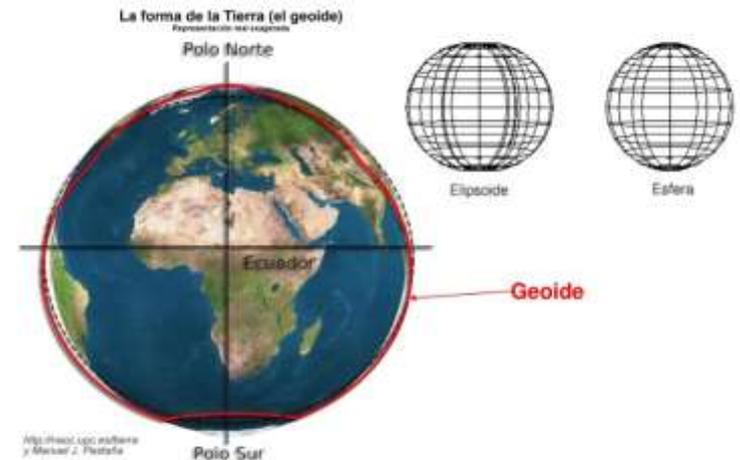
1. ¿Qué es un Modelo Geoidal (Cuasi-Geoidal)?
2. Problema
3. Zona de Estudio
4. Datos Adquiridos
5. Algunos Fundamentos Teóricos
6. Método Remove – Restaurar y Metodología Aplicada
7. Resultados
8. Conclusiones

# 1. ¿Qué es un Modelo Geoidal (Cuasi Geoidal)?

Un modelo geoidal (cuasi-geoidal) es una representación geométrica de una aproximación físico matemática del campo de gravedad terrestre.

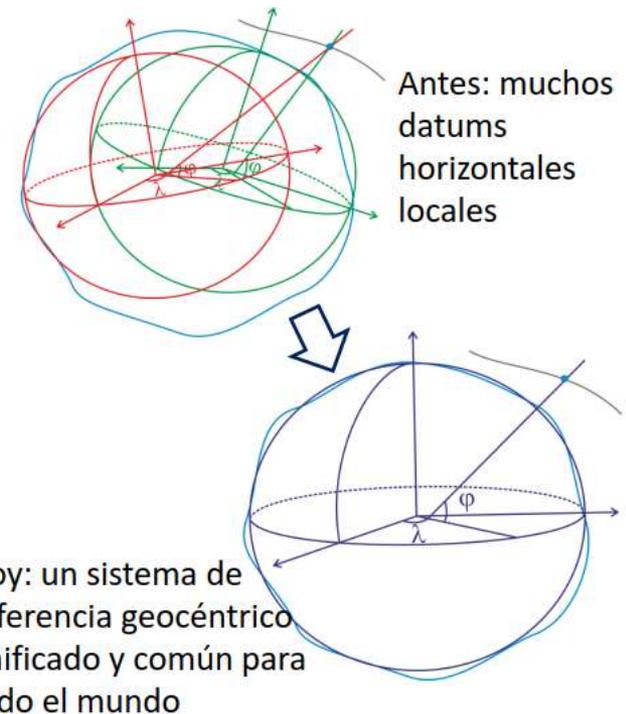
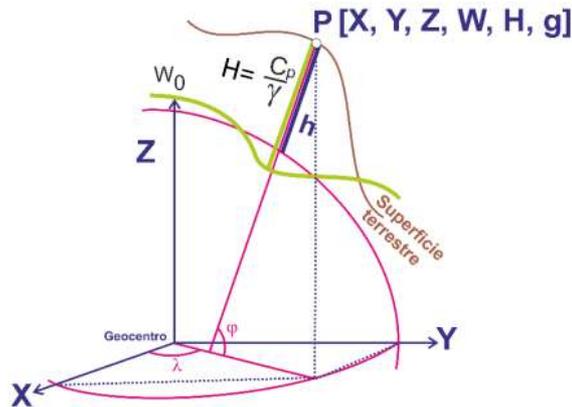
El cual involucra:

- Expresiones matemáticas.
- Parámetros.
- Mediciones de funciones de campo; de gravedad, alturas, deflexiones de la vertical.
- Estadísticas.
- Algoritmos.



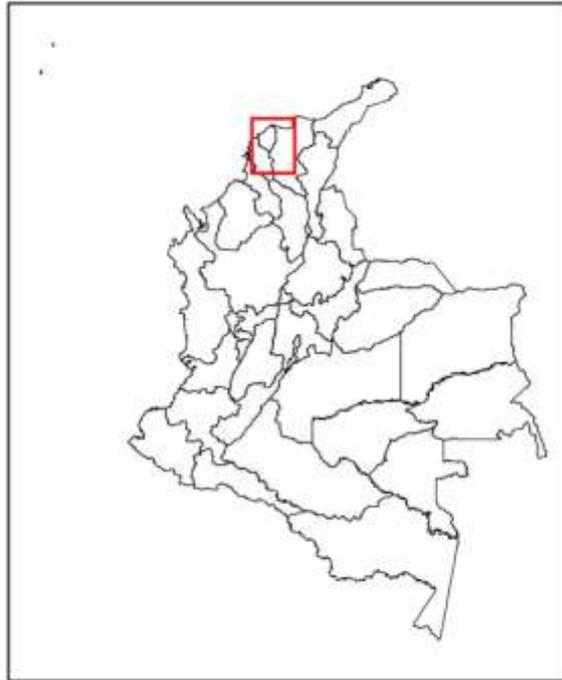
## 2. Problema

Se requiere de la modernización de los diferentes sistemas verticales y referirse a un datum global vertical, de manera similar a la estandarización y materialización del sistema horizontal (ITRS/ITRF).



Aunque en Colombia hay un modelo geoidal (Geocol2004) vigente, no representa la exactitud requerida hoy en día para trabajos de precisión y adecuación de las respectivas alturas.

### 3. Zona de Estudio

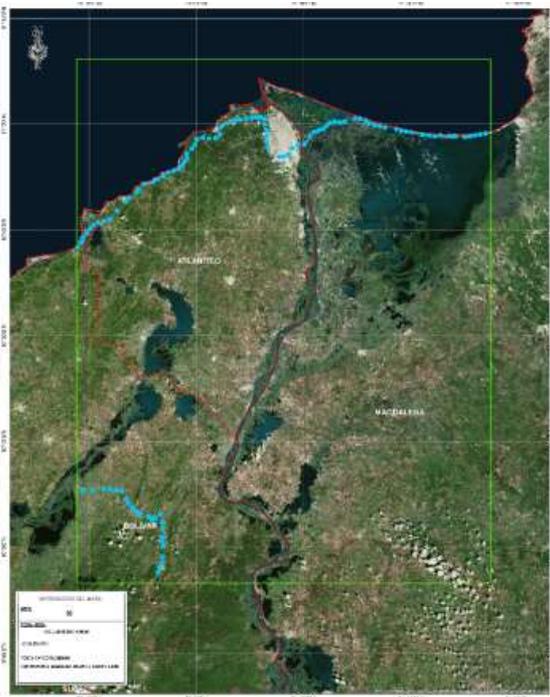


Parte alta de la cuenca del Río Magdalena, cubriendo la totalidad del departamento del Atlántico, y parte de los departamentos de Magdalena y Bolívar.

Área total es de aproximadamente 14.500 km<sup>2</sup>

Vértice	Latitud	Longitud
1	11°9'10.8"	-75°16'48"
2	9°54'50.4"	-75°16'48"
3	9°54'50.4"	-74°18'54"
4	11°9'10.8"	-74°18'54"

## 4. Datos Adquiridos



Mapa de Datos IGAC



Mapa de Gravedad IGAC-Ecopetrol



Mapa de Datos de Altimetría Satelital

## 5. Algunos Fundamentos Teóricos

El problema de valor límite consiste en dar solución a:

$$\nabla T = 0$$

¿Cuál es la relación entre el potencial anómalo  $T$  (Función armónica) y los valores que puede tomar en una superficie frontera  $S$  (como las anomalías de gravedad  $\Delta g$ )?

**Ecuación Fundamental de  
Geodesia Física:**

$$-\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T = \Delta g$$

Donde su solución se conoce a partir de la linealización de:

$$-2\pi T + \iint_S \left[ T \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{l} \right) - \frac{1}{l} \frac{\partial T}{\partial n} \right] dS = 0$$

Solución de Stokes (1849)  
Ondulaciones de Geoide ( $N$ )  
(Geoide)

Solución de Molodenski (1945)  
Alturas Anómalas ( $\zeta$ )  
(Cuasi-Geoide)

## Determinación del Geoide (Cuasi-Geoide) por Mínimos Cuadrados de Colocación en 3D (LSC 3D)

$$T(r, \bar{\varphi}, \lambda) = W - U = GM \left[ \sum_{l=2}^N \sum_{m=-l}^l \bar{C}_{lm} S_{lm}(r, \bar{\varphi}, \lambda) \right]$$

Con:

$$S_{lm}(r, \bar{\varphi}, \lambda) = \frac{1}{a} \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} Y_{lm}(\bar{\varphi}, \lambda)$$

Núcleo de reproducción (Kernel)

$$K(P, Q) = \sum_{l=2}^{\infty} \sigma_l^2 \sum_{m=-l}^l S_{lm}(r, \bar{\varphi}, \lambda) S_{lm}(r', \bar{\varphi}', \lambda') = \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) \sigma_l^2 \left( \frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} P_l(\cos \psi)$$

Los armónicos esféricos sólidos son funciones base ortogonales en un espacio de Hilbert con un centro de producto isotrópico, armónico a una llamada esfera Bjerhammar totalmente cerrada en la Tierra. El espacio de Hilbert corresponde a un espacio donde el número de dimensiones tiende al infinito.

El potencial anómalo  $T$  no es necesariamente un elemento en este espacio pero puede ser aproximado a partir de las funciones que componen el espacio.

El modelo de covarianza completo y que a su vez forma el kernel reproducible del espacio de Hilbert de funciones armónicas fuera de la esfera de Bjerhammar es:

$$COV(\psi, r, r') = \alpha \sum_{n=2}^N (\sigma_i^{err})^2 \left( \frac{\bar{R}}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A}{(n-1)(n-2)(n+4)} \left( \frac{R_B^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi)$$

Donde  $R_B$  es el radio de la esfera de Bjerhammar,  $A$  es una constante con unidades  $(m/s)^4$ ,  $\bar{R}$  es el radio de la Tierra,  $\alpha$  un factor de escala.

## 6. Método Remove – Restaurar y Metodología Aplicada

El método Remove – Restaurar (remove - restore) consiste en la descomposición del potencial anómalo en tres diferentes componentes (global, regional o local y residual).

$$T_{Total} = T_{Global} + T_{Local} + T_{Regional}$$

Componente proporcionada a partir de un Modelo Global Gravitacional (GGM)

Componente proporcionada a partir de un Modelo Digital de Elevación (DEM)

Componente proporcionada a partir de Anomalías de Gravedad Residuales

Por medio del Teorema de Bruns:  $N = \frac{T}{\gamma}$      $\zeta = \frac{T}{\gamma}$

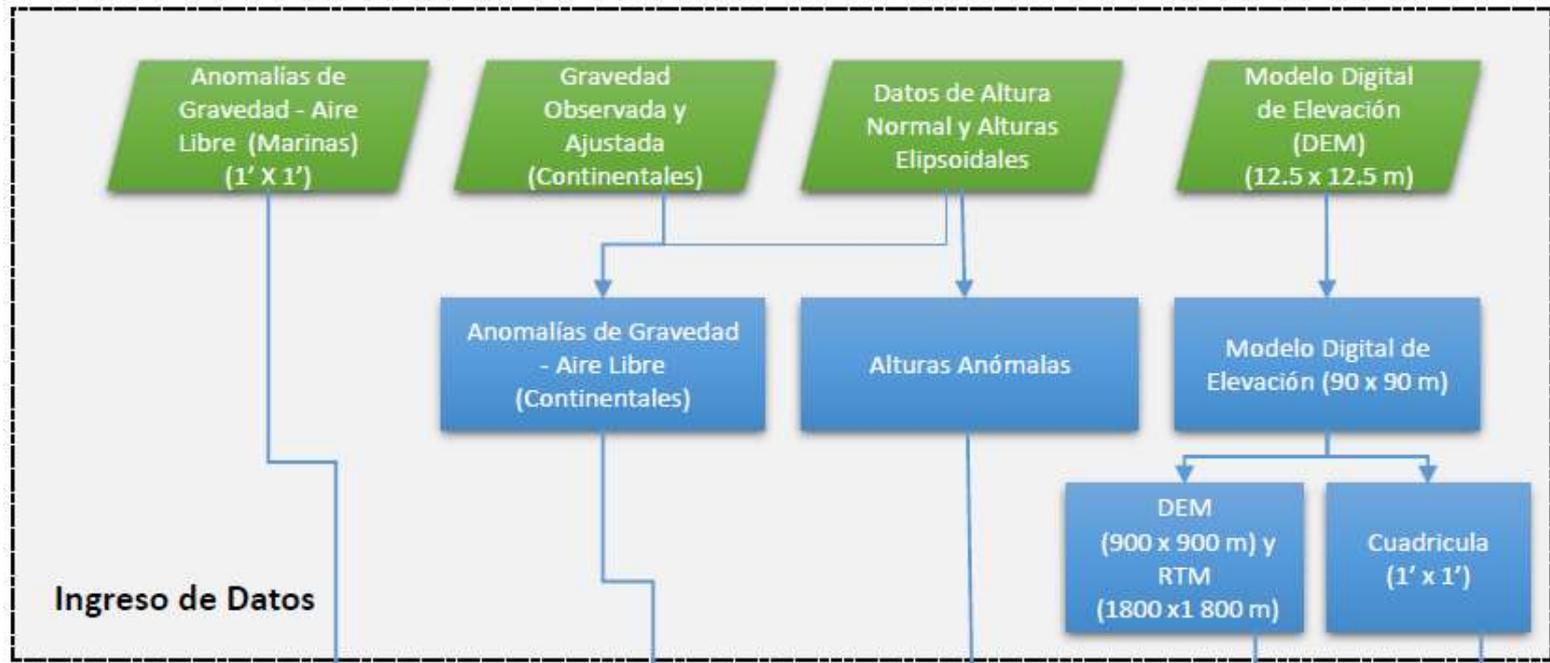
$$N_{Total} = N_{Global} + N_{Local} + N_{Regional} \quad ; \quad \zeta_{Total} = \zeta_{Global} + \zeta_{Local} + \zeta_{Regional}$$

De acuerdo al método LSC 3D:

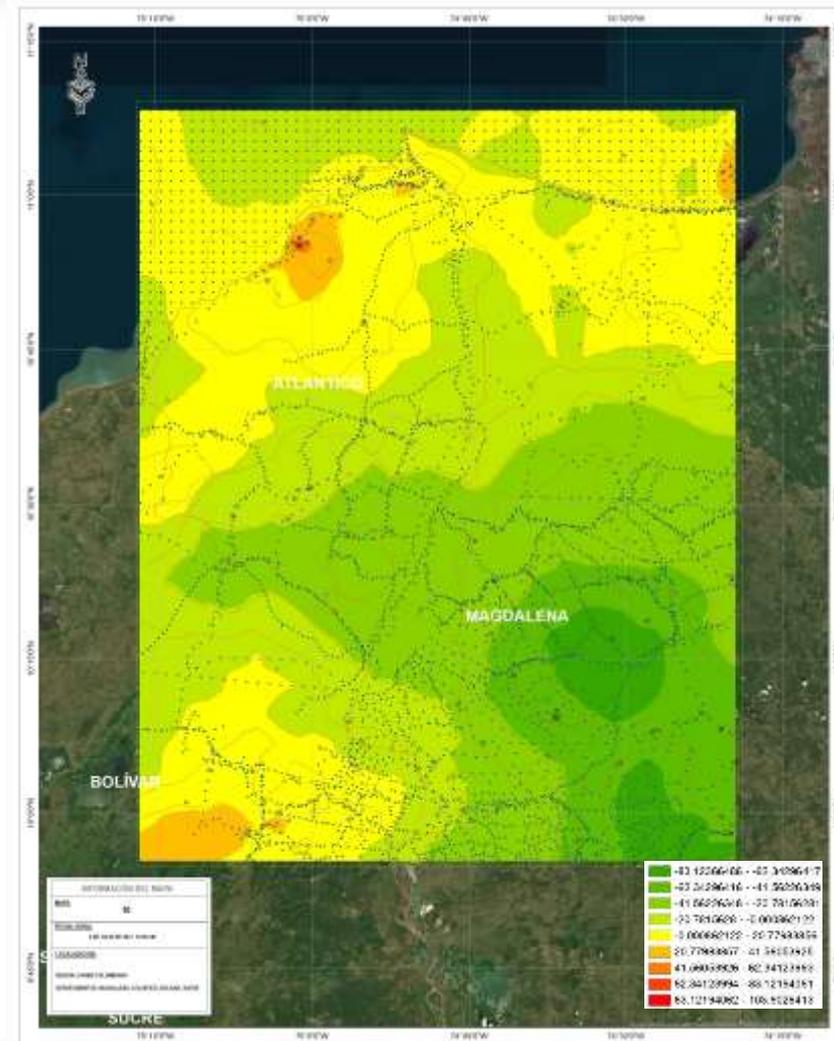
$$y_{ir} = y_i - L_i(T_{EGM}) - L_i(T_M) = L_i(T) - L_i(T_{EGM}) - L_i(T_M) + e_i + A_i^T X$$

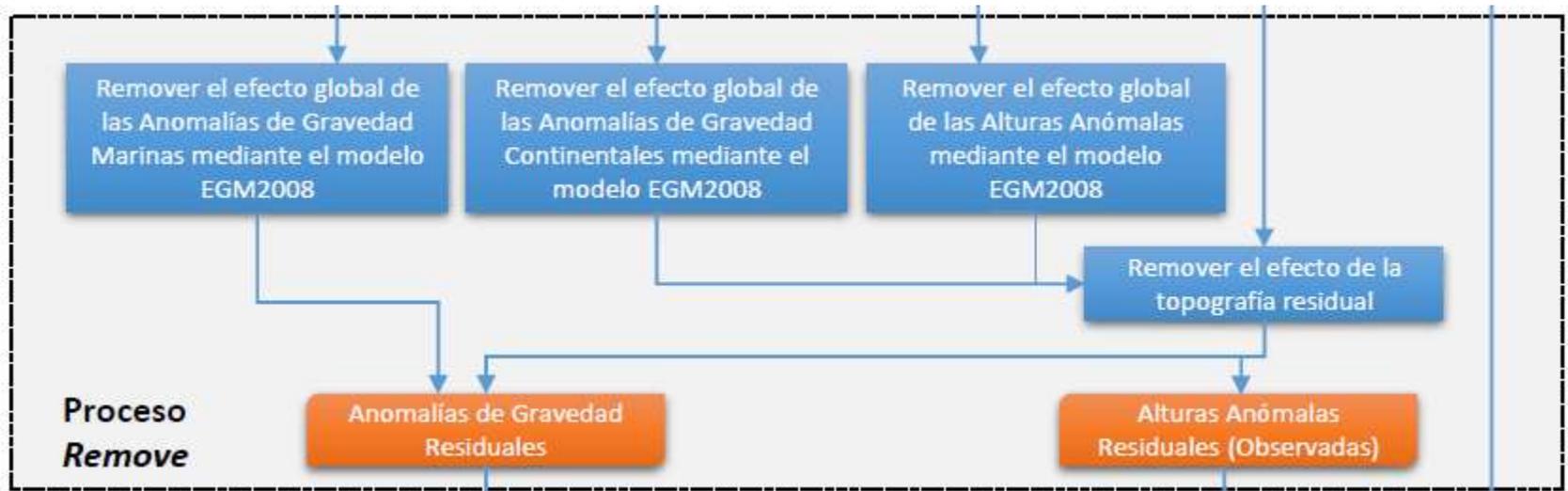
## Metodología Aplicada

Con el uso del Software GRAVSOFT se realizó la siguiente metodología

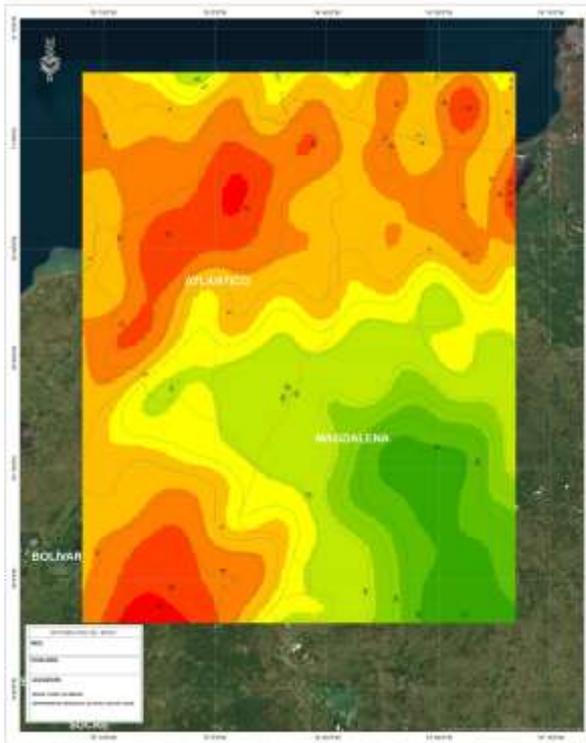


## Mapa Anomalías de Gravedad Aire-Libre

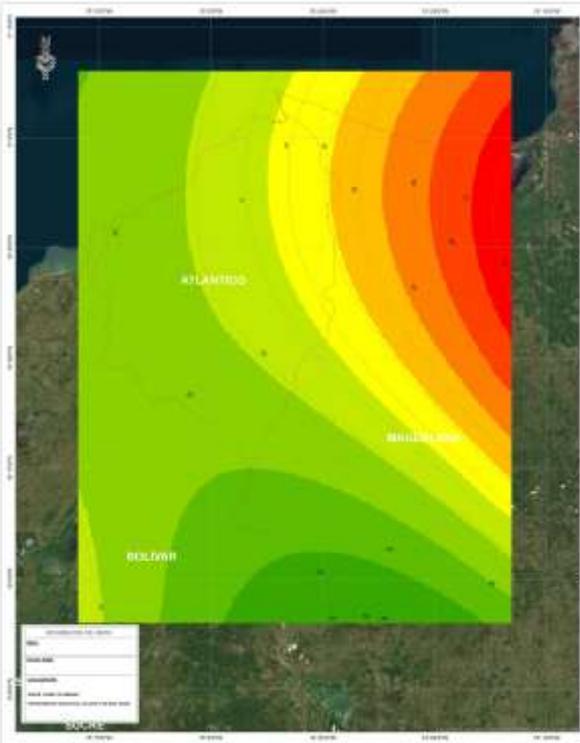




## Efecto Componente Global

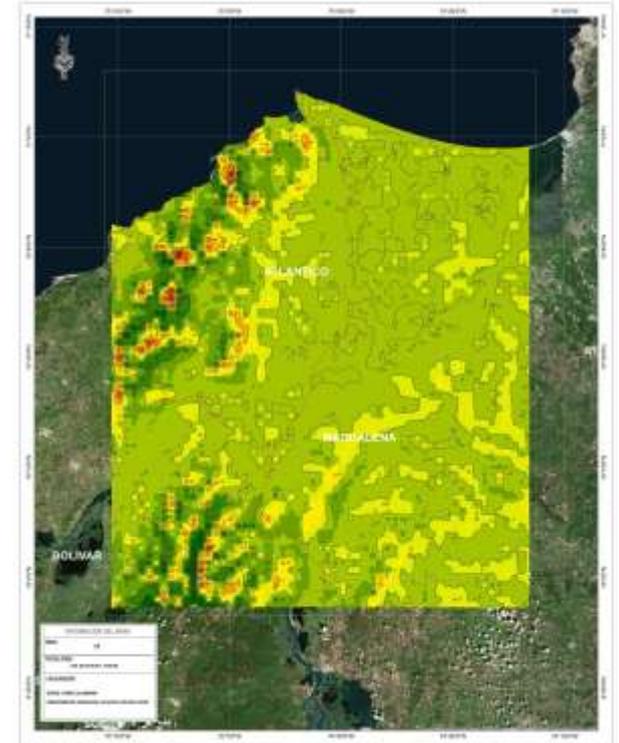


Anomalía de Gravedad  
EGM2008 a 2160

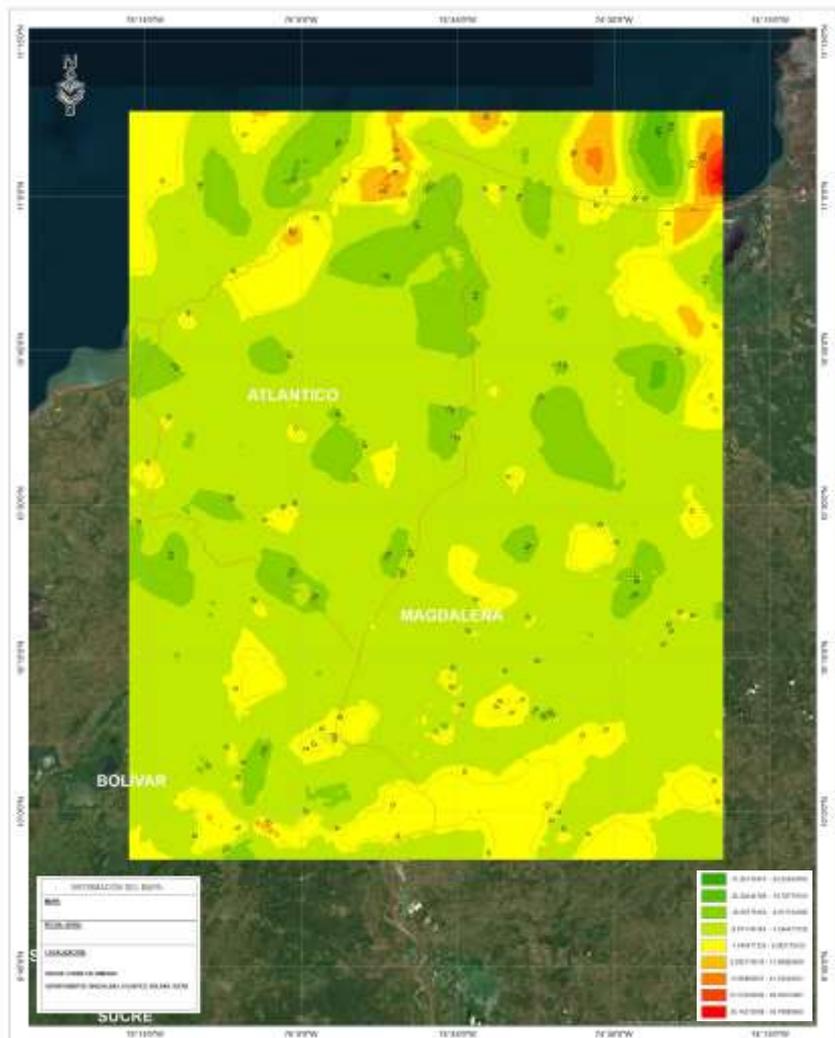


Anomalía de Gravedad  
EGM2008 a 180

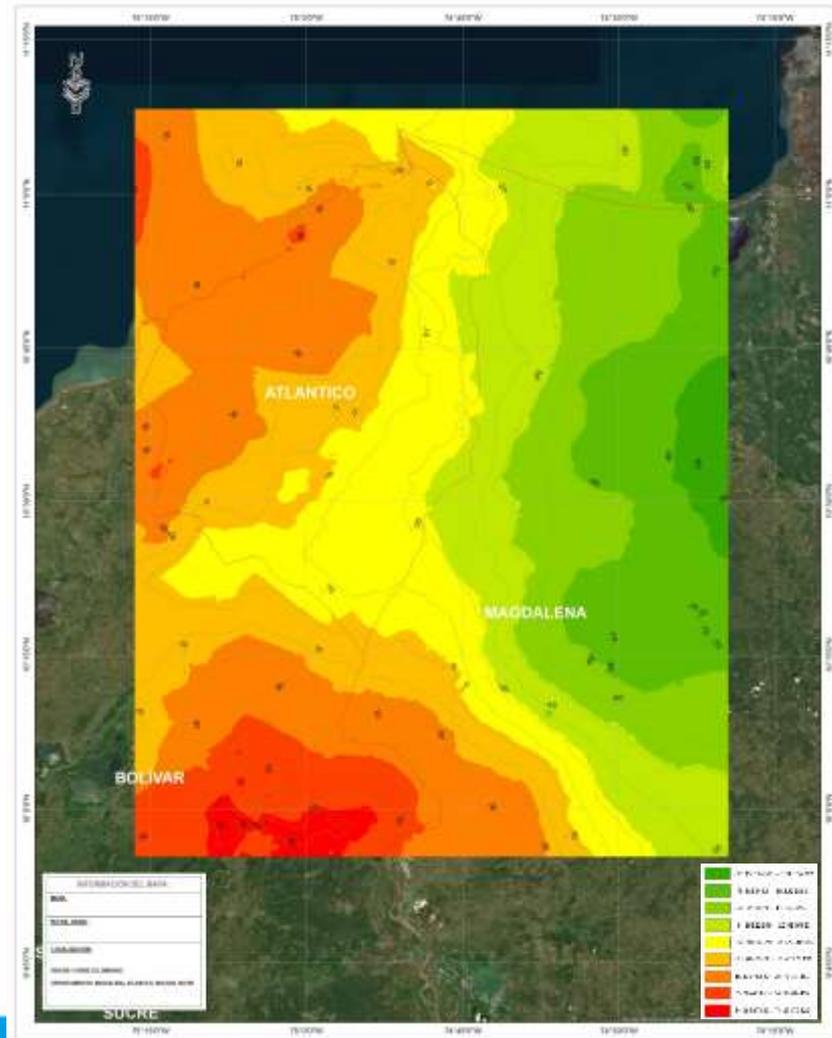
## Efecto Componente Local



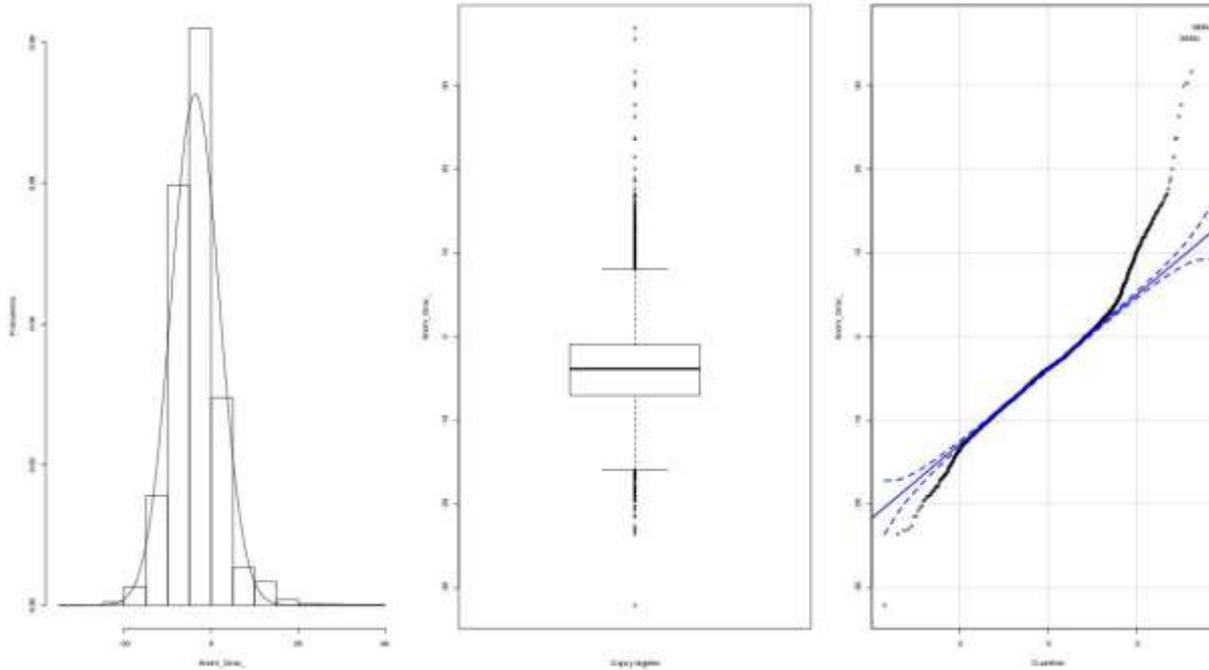
## Anomalía de Gravedad Residual con EGM2008 a 2160



## Anomalía de Gravedad Residual con EGM2008 a 180

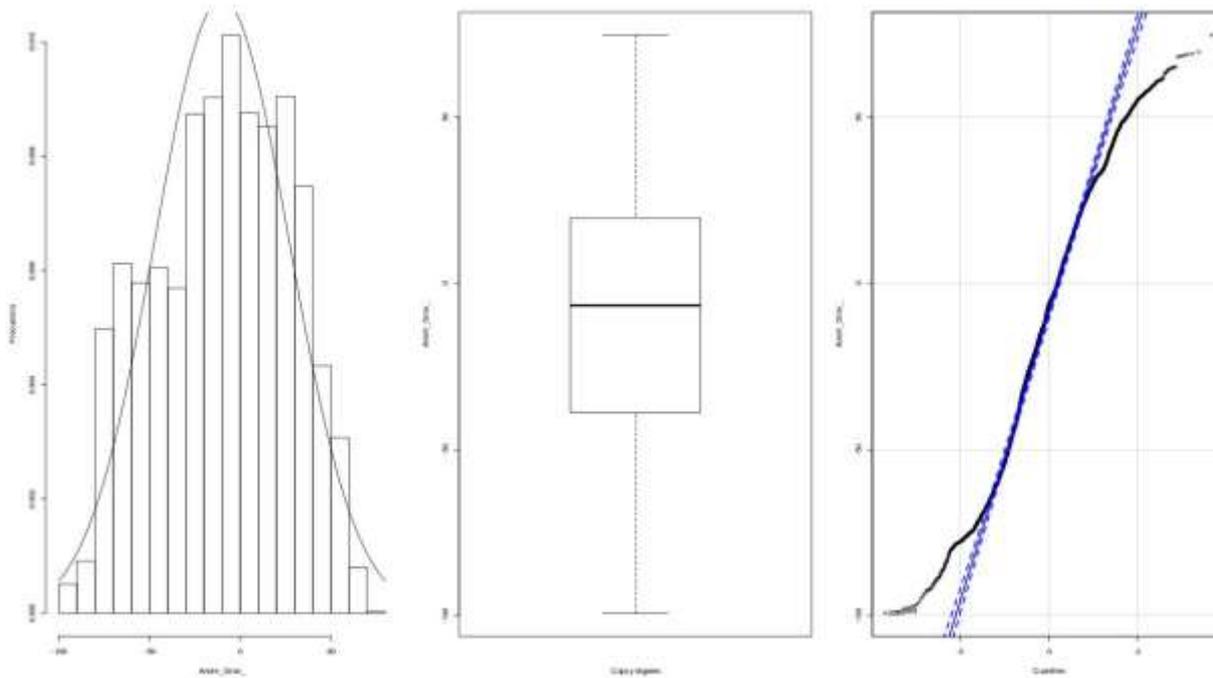


## Estadísticas de Anomalías de Gravedad Residual con EGM2008 a 2160

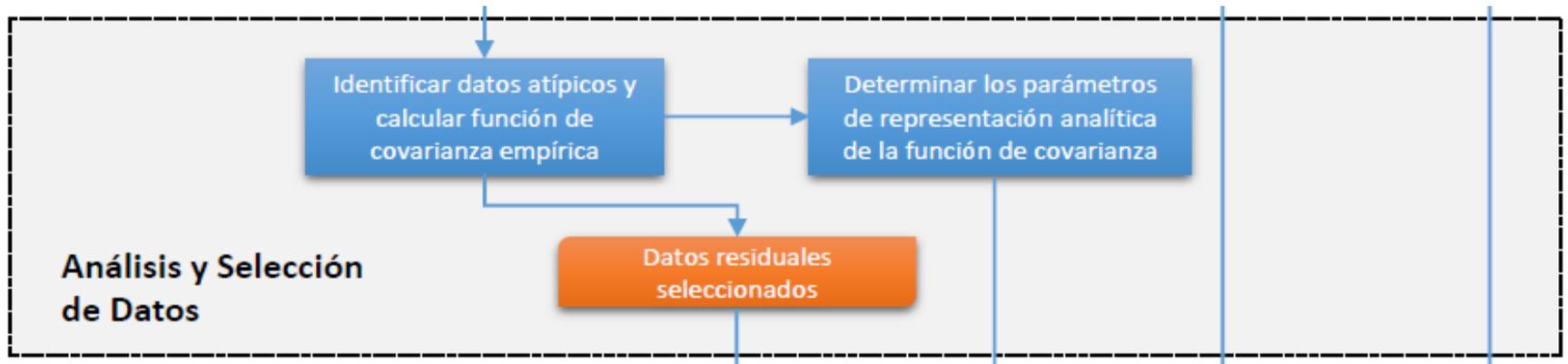


Mínimo	-32.05
Máximo	36.79
Promedio	-3.66
Desviación Estándar	5.48
Asimetría	0.89
Kurtosis	7.47

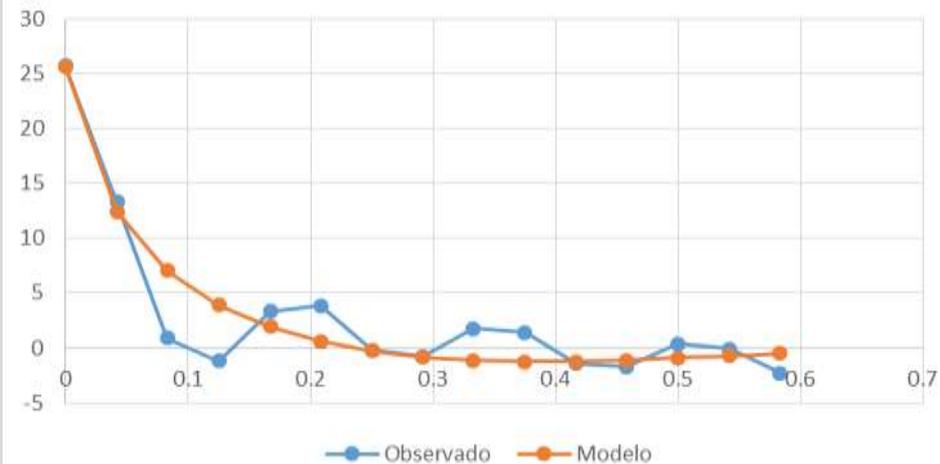
## Estadísticas de Anomalías de Gravedad Residual con EGM2008 a 180



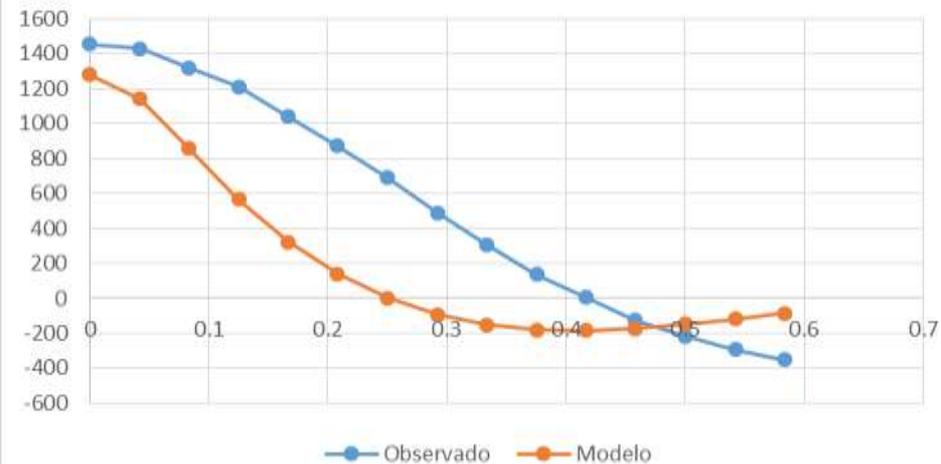
Mínimo	-99.16
Máximo	74.52
Promedio	-10.12
Desviación Estándar	37.08
Asimetría	-0.16
Kurtosis	2.14



Funciones de Covarianza con EGM2008 a 2160



Funciones de Covarianza con EGM2008 a 180



## Calcular Modelo de Alturas Anómalas

Crear y solucionar las ecuaciones normales y  
sesgos de los parámetros ingresados

Calcular las Alturas Anómalas Residuales en la  
cuadrícula determinada

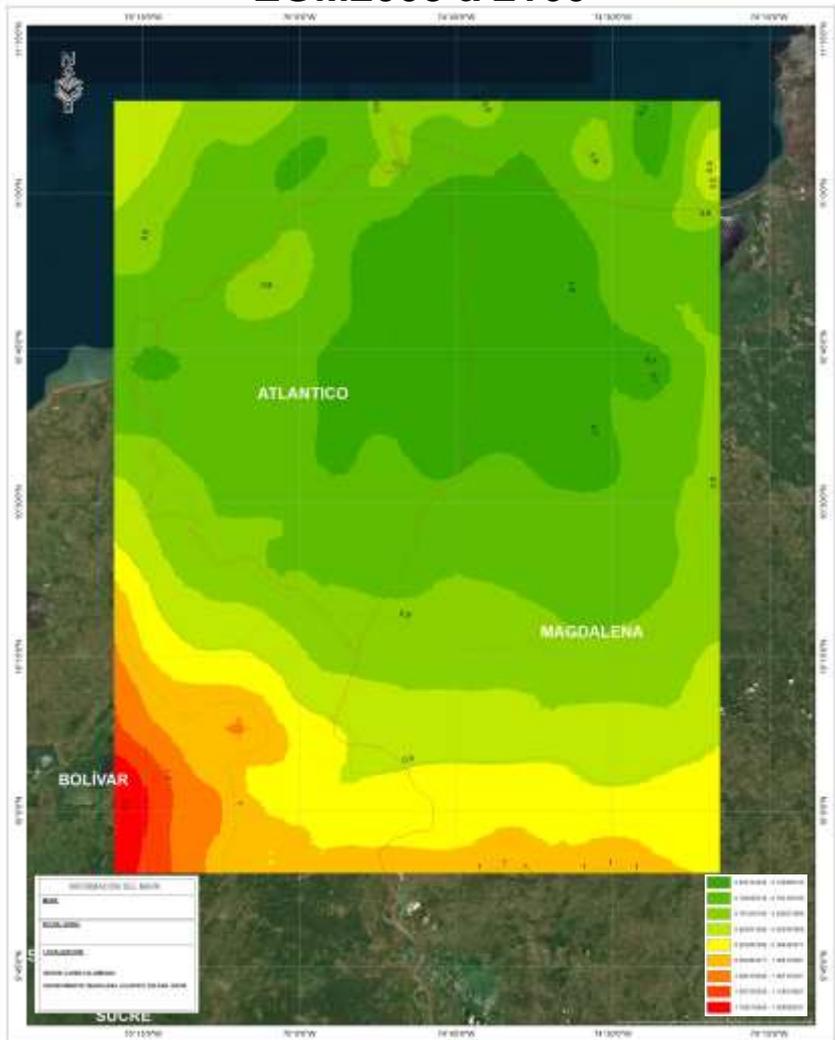
### Estadísticas de Alturas Anómalas Residuales Calculadas en las observaciones con EGM2008 a 2160 (Metros)

	Observaciones	Predicciones	Diferencias	Error Estimado
<b>Media</b>	0.801364	0.800727	0.000637	0.018047
<b>Desviación Estándar</b>	0.352475	0.082214	0.321688	0.00145
<b>Máximo</b>	1.8317	1.002523	0.92923	0.023104
<b>Mínimo</b>	0.5624	0.685559	-0.400523	0.016467

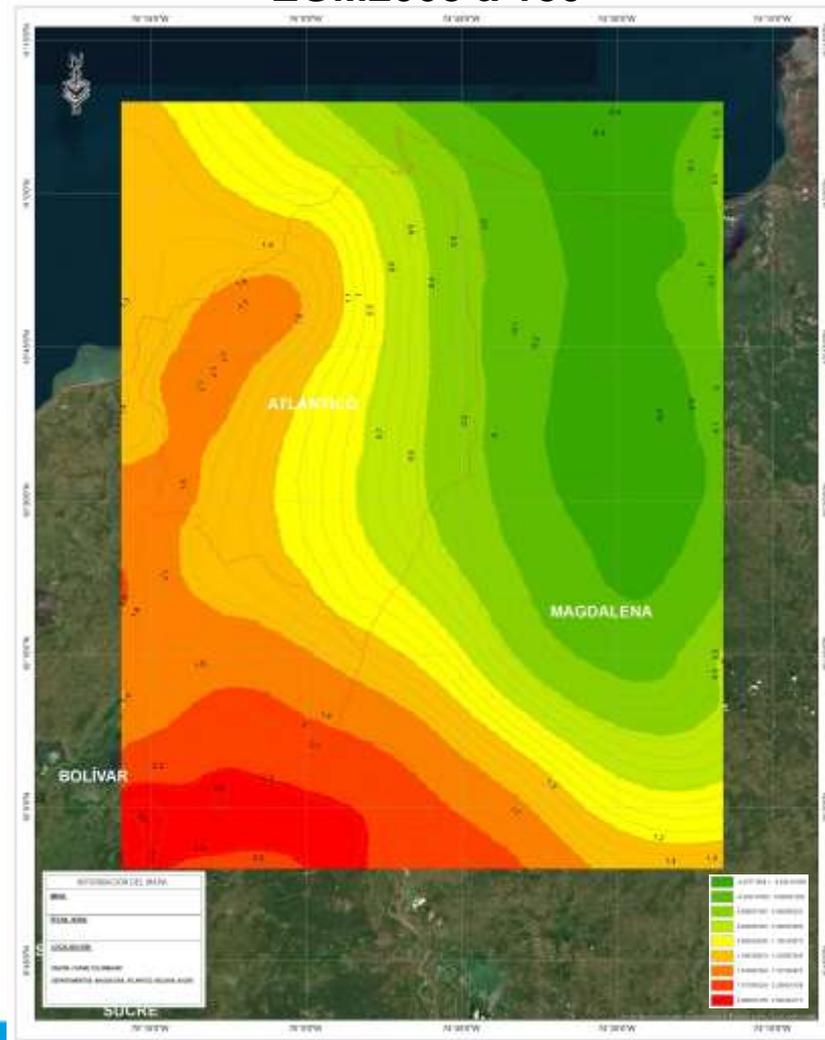
### Estadísticas de Alturas Anómalas Residuales Calculadas en las Observaciones con EGM2008 a 180 (Metros)

	Observaciones	Predicciones	Diferencias	Error Estimado
<b>Media</b>	0.91596	0.93074	-0.01478	0.057134
<b>Desviación Estándar</b>	1.028538	0.923339	0.316763	0.003381
<b>Máximo</b>	3.089	2.25663	0.892264	0.073485
<b>Mínimo</b>	-0.439	-0.320156	-0.787332	0.053531

## Altura Anómala Residual con EGM2008 a 2160

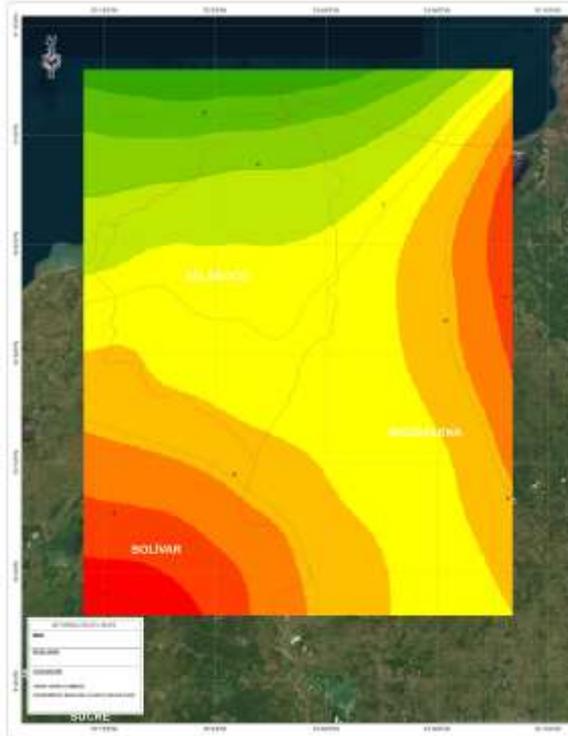


## Altura Anómala Residual con EGM2008 a 180

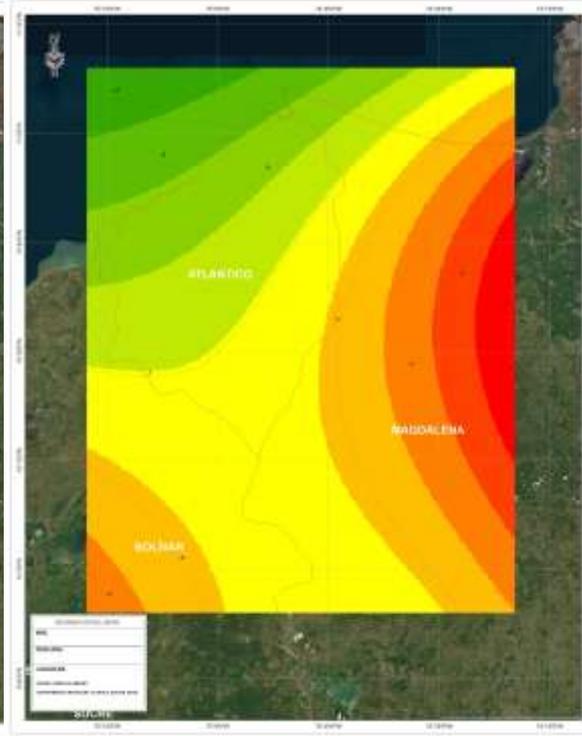




## Efecto Componente Global

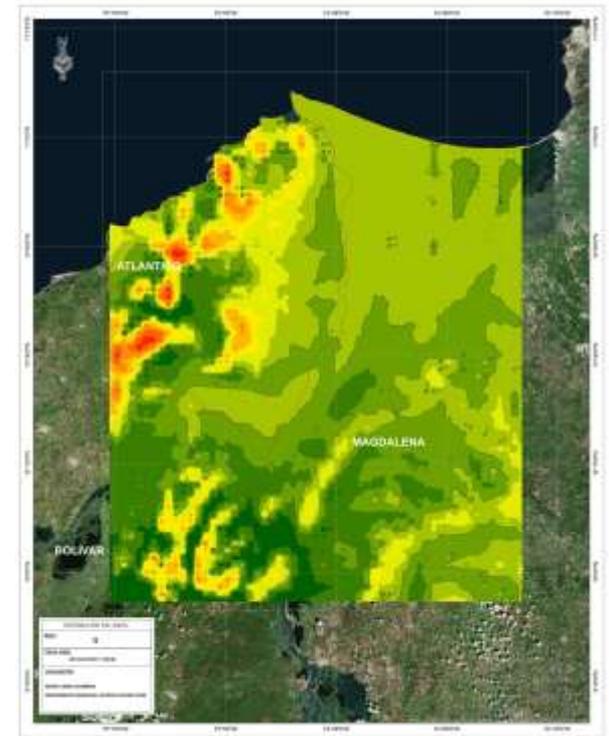


Altura Anómala  
EGM2008 a 2160



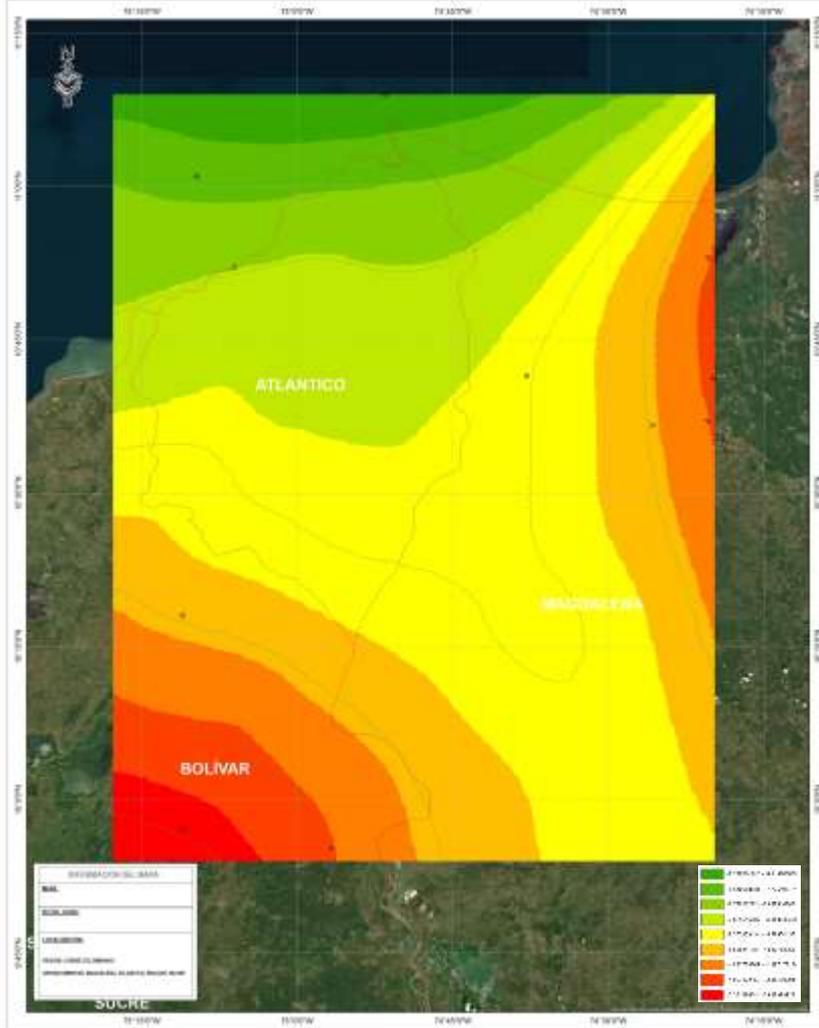
Altura Anómala  
EGM2008 a 180

## Efecto Componente Local

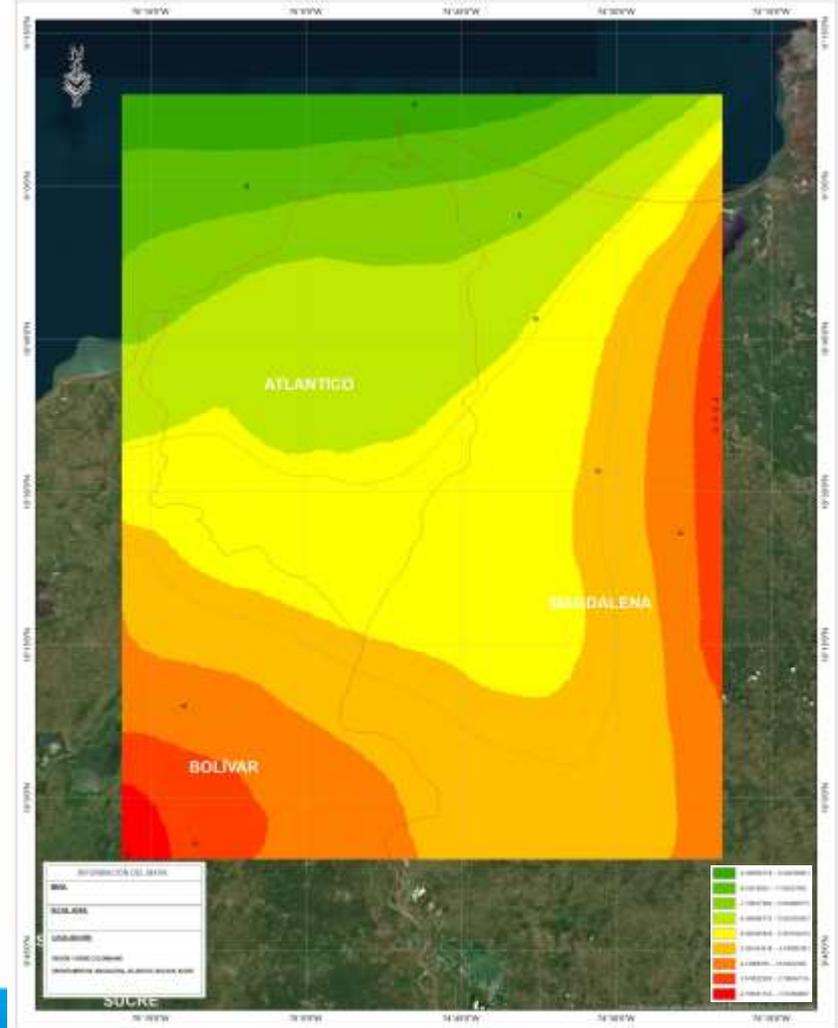


## 7. Resultados

Cuasi Geoide con EGM2008 a 2160



Cuasi Geoide con EGM2008 a 180

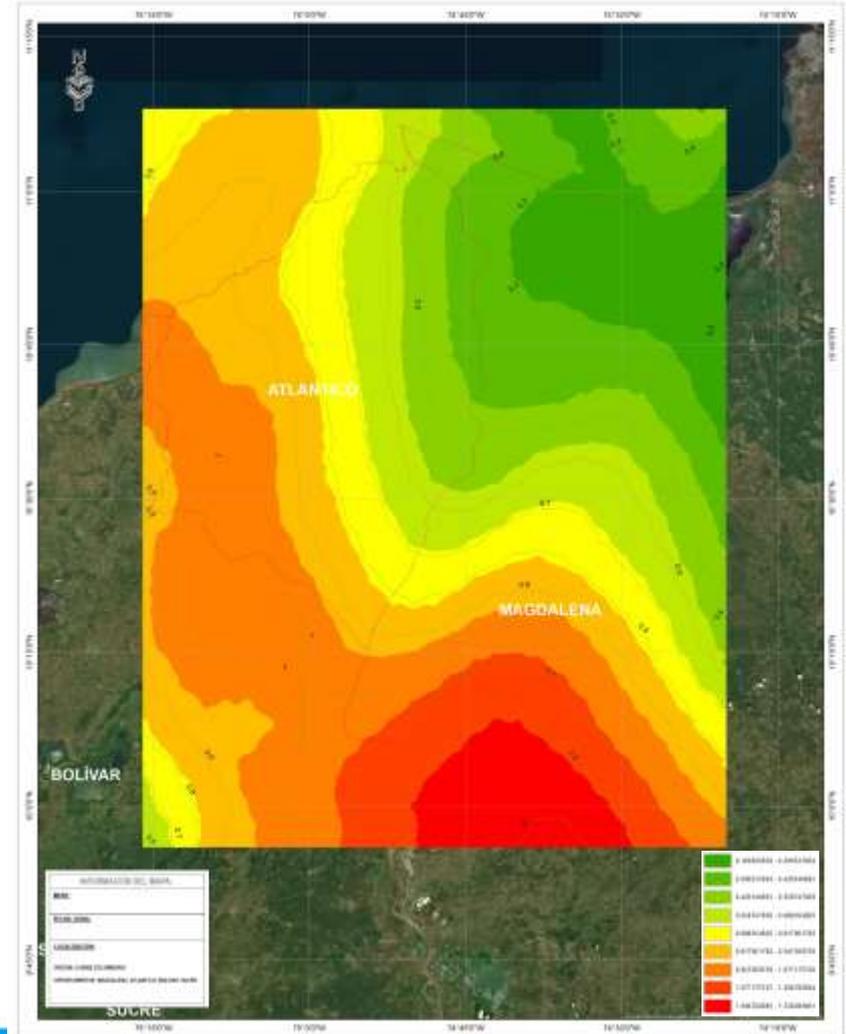
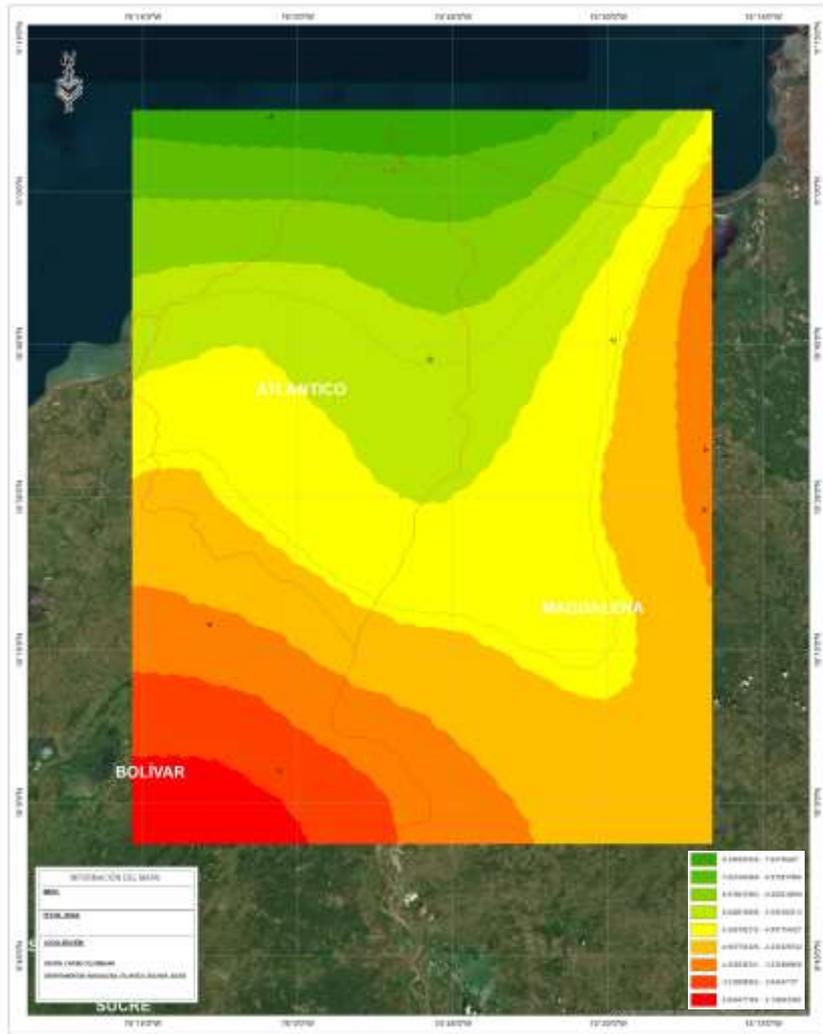


Modelo	Promedio (m)	Desviación Estándar (m)
Cuasi Geoide a 2190	-5.97103821	1.190598483
Cuasi Geoide a 180	-5.67678472	1.396564025
Geocol 2004	-5.21582293	1.270639533

Diferencias	Promedio (m)	Desviación Estándar (m)
Geocol2004 - Cuasi Geoide a 2190	0.75521528	0.287051654
Geocol2004 - Cuasi Geoide a 180	0.46096179	0.448180188

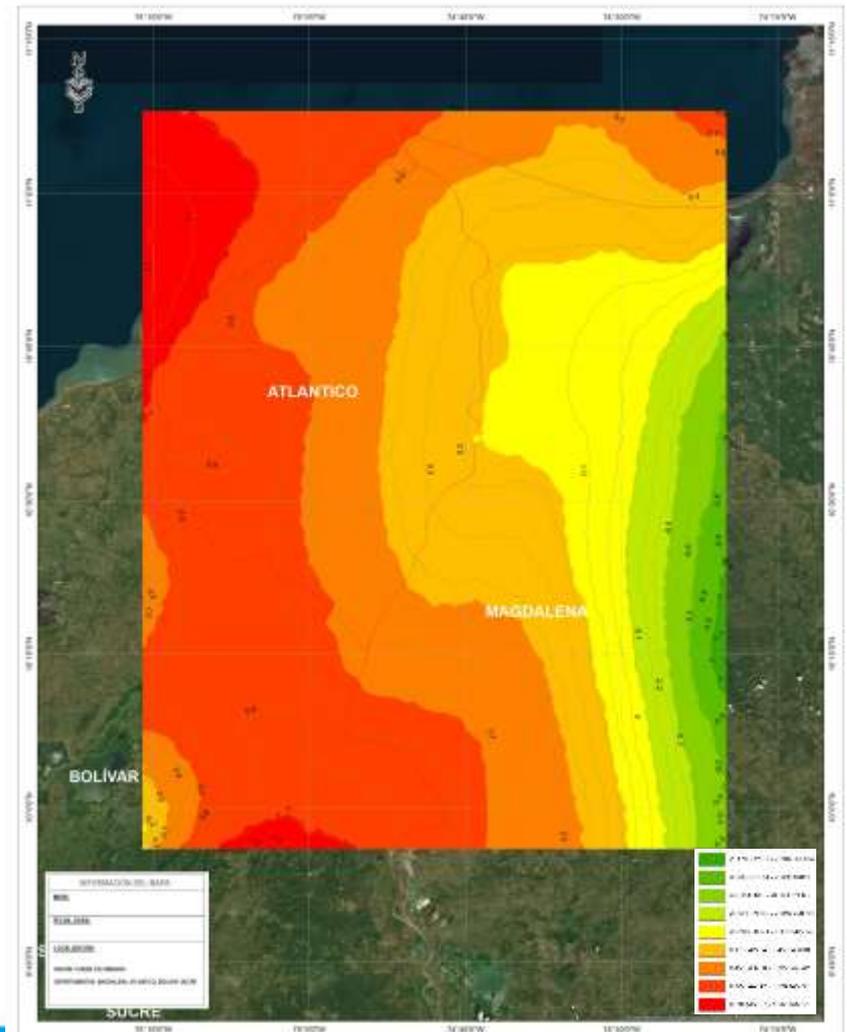
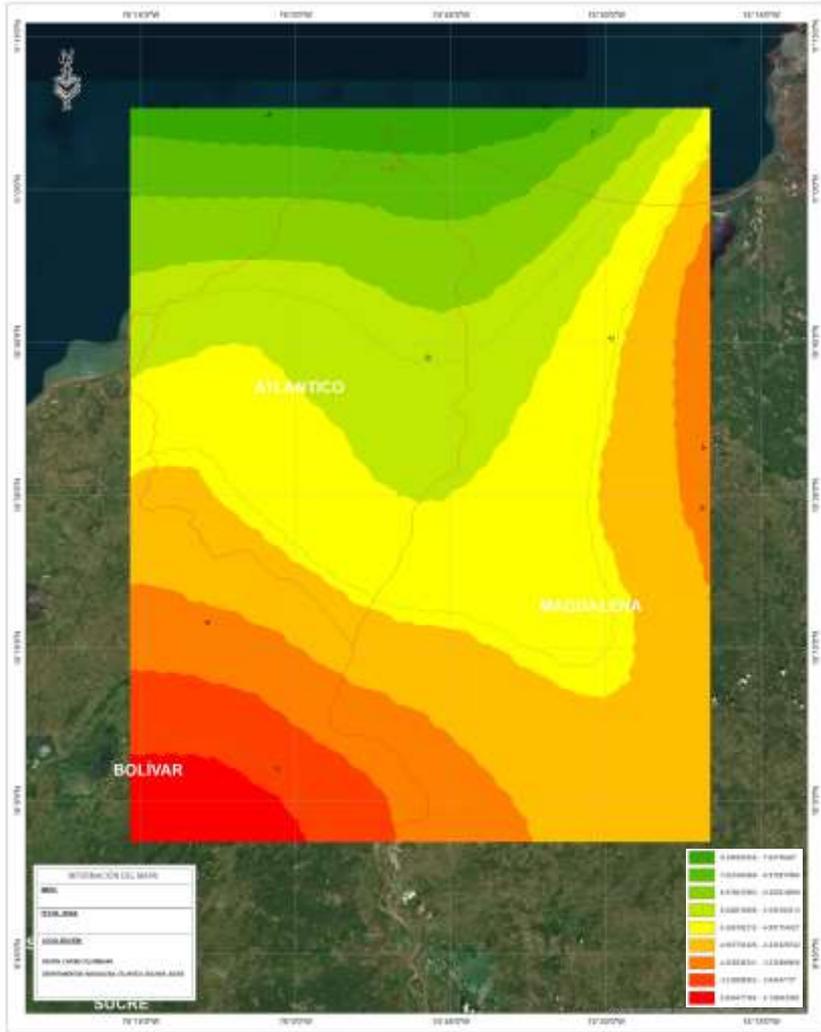
## Geocol 2004

## Diferencias Geocol2004 y Cuasi Geoide con EGM2008 a 2160



## Geocol 2004

## Diferencias Geocol2004 y Cuasi Geoide con EGM2008 a 180



## 7. Conclusiones

1. Se obtienen alturas anómalas residuales en la zona de estudio con una diferencia de alturas observables frente a las estimadas de alrededor de 2 cm.
2. Los errores de estimación son inferiores a 2 cm para el primer M.C.A y 6 cm para el segundo M.C.A, con desviaciones estandar de 0.00145 y 0.003381 respectivamente.
3. Diferencia en la zona de Estudio del Modelo oficial para Colombia (Geocol2004) en 0.46096179 m para las alturas anómalas con el uso del EGM2008 a 180 y en 0.75521528 m para las alturas anómalas con el uso del EGM2008 a 2160.
4. La aplicación del método 3D-LSC ofrece la posibilidad de determinar cuasi-geoides locales o regionales con buena precisión (en función de los datos). Sin embargo es necesaria la inclusión de datos distribuidos casi homogéneamente sobre el territorio, como también de la intervención de alturas anómalas de calidad obtenidas a partir de técnicas GNSS y nivelación.
5. Bajo los resultados aquí obtenidos, en los últimos meses se han refinado algunas deficiencias en la metodología en cuanto a su aplicación a todo el territorio Colombiano, por decir algunos: Programación del cálculo de la componente local en diferentes lenguajes de programación, determinación a partir de 2D-LSC y su comparación con las técnicas FFT, estudios de identificación de los mejores radios de integración tanto en la componente local como en la función de Stokes y estudios en la selección del mejor kernel.



# GRACIAS