

DETERMINACIÓN DE ALTURAS FÍSICAS EN COLOMBIA
TRADUCCIÓN

DOCUMENTO ORIGINAL:
UNTERSUCHUNG PHYSIKALISHER HÖHEN IN KOLUMBIEN

LAURA SÁNCHEZ

STUDIENARBEIT

INSTITUT FÜR PLANETARE GEODÄSIE
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
DRESDEN, NOVEMBER 2002

CONTENIDO

Motivación	3
1. Sistemas de alturas: Generalidades	4
2. Cálculo de las alturas físicas	6
2.1 Números geopotenciales y alturas dinámicas	6
2.2 Alturas ortométricas	9
a. Helmert	9
b. Niethammer	10
c. Mader	11
d. Mueller	11
e. Ramsayer	12
f. Ledersteger	13
g. Baranov	13
2.3 Alturas normales	13
a. Molodenski	14
b. Vignal	14
c. Bomford	15
d. Hirvonen	15
3. Ejercicio numérico	16
3.1 Información utilizada	16
a. Datos de nivelación	16
b. Datos de gravedad	17
c. Circuitos de nivelación	20
3.2 Comentarios sobre los cálculos numéricos	21
3.3 Resultados numéricos	22
a. Números geopotenciales y alturas dinámicas	22
b. Alturas ortométricas	25
c. Alturas normales	26
3.4 Comparación de las diferentes alturas físicas evaluadas	27
4. Conclusiones y actividades futuras	31
Referencias	33
Anexo: Representación gráfica de los perfiles de nivelación y las correcciones dinámicas, ortométricas y normales correspondientes.	35

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Nivelación geométrica y alturas físicas	4
2. Alturas ortométricas y normales	6
3. Latitud geográfica normal φ^N	15
4. Redes de nivelación en Colombia	17
5. SIGNAR: estaciones absolutas de gravedad y red gravimétrica de primer orden	18
6. SIGNAR: red gravimétrica de tercer orden	19
7. Información gravimétrica terrestre disponible en Colombia	20
8. Circuitos de nivelación seleccionados para el cálculo de alturas físicas en Colombia	22
9. Histogramas de las correcciones dinámicas obtenidas a partir de diferentes latitudes de referencia	24
10. Diferencias entre las correcciones dinámicas calculadas a partir de latitudes de referencia diferentes	25
11. Histogramas de las correcciones ortométricas obtenidas según diferentes métodos para la estimación del valor medio de gravedad	26
12. Histogramas de las correcciones normales obtenidas a partir de diferentes aproximaciones numéricas	28

ÍNDICE DE TABLAS

1. Características principales de los diferentes tipos de alturas físicas	7
2. Precisiones requeridas en los valores de gravedad para la determinación de números geopotenciales	8
3. Características de los circuitos de nivelación seleccionados para el cálculo de alturas físicas en Colombia	21
4. Errores de cierre de los circuitos de nivelación seleccionados	23
5. Indicadores estadísticos de las correcciones dinámicas	24
6. Ejemplos de las correcciones dinámicas obtenidas para puntos de altura similar en latitudes diferentes	24
7. Indicadores estadísticos de las correcciones ortométricas	25
8. Comparación de las alturas normales según Molodenski, Vignal y Hirvonen	27
9. Indicadores estadísticos de las correcciones normales	27
10. Comparación de los diferentes tipos de alturas físicas	30

MOTIVACIÓN

Los sistemas de alturas en América del Sur fueron introducidos, en general, durante los años cincuenta, con el objetivo de complementar las posiciones horizontales en la elaboración de planchas topográficas a nivel nacional. Como datum vertical se definió, de manera individual, el nivel medio del mar obtenido a partir de registros mareográficos con períodos de observación que varían entre 10 y 20 años. Bajo la concepción clásica de que dicho nivel coincidía con el geoide, el procesamiento de los registros (cálculo del valor promedio correspondiente) eliminó, con muy buena aproximación, las variaciones temporales periódicas de la superficie del mar (mareas y efectos meteorológicos, oceanográficos y de densidad del agua), pero el análisis de las variaciones no periódicas, las seculares y las generadas por la topografía local de la superficie del mar (SSTop: Sea Surface Topography) fue omitido, lo que podría generar errores sistemáticos de varios decímetros en las diferentes realizaciones del nivel de referencia.

Consecuentemente, el control vertical ha sido extendido a lo largo de las vías de comunicación en líneas de nivelación determinadas mediante técnicas geodésicas de alta precisión (spirit leveling). Dado que las alturas niveladas satisfacían las especificaciones de precisión requeridas por las escalas cartográficas utilizadas en los mapas nacionales, no se dio mayor importancia al efecto del campo de gravedad terrestre en las diferencias de nivel medidas y, con el tiempo, se omitió tradicionalmente la reducción por gravedad. Esto significa que en la mayoría de los países de América del Sur las alturas oficiales son cantidades meramente geométricas, que en forma de redes de nivelación han sido ajustadas, asumiendo el efecto del campo de gravedad como un error más de medición.

Las inconsistencias generadas por estos dos factores (definición del datum vertical y omisión del efecto de gravedad en la nivelación) se hacen aún más evidentes al derivar la componente vertical a partir de la combinación de las nuevas técnicas geodésicas de posicionamiento (como por ejemplo el GPS) con modelos geoidales gravimétricos de alta resolución; de allí, es importante que en la región se promueva el cálculo y adopción de un tipo de alturas físicas como parte de la definición y realización de un sistema vertical de referencia moderno.

Dentro de este marco, en el presente ejercicio se adelanta una comparación de diferentes reducciones utilizadas en la obtención de alturas dinámicas, ortométricas y normales. La evaluación numérica se realiza sobre los cinco circuitos de nivelación más largos existentes en Colombia, los cuales contienen cerca de 4 500 puntos sobre más de 6 000 km de extensión y alturas hasta de 4 000 m. El objetivo central de este ejercicio es identificar el procedimiento más ágil posible para la conversión de las alturas existentes en cantidades físicas, de modo que se aprovechen al máximo las ventajas ofrecidas por las tecnologías modernas de posicionamiento.

1. SISTEMAS DE ALTURAS: GENERALIDADES

En la nivelación geométrica el sistema de medición (instrumento y reglas graduadas o miras) se orienta verticalmente según la línea de la plomada del campo de gravedad terrestre; por tanto, el plano horizontal del instrumento de medición coincide con la línea tangente a la superficie equipotencial que pasa por el punto de observación. De acuerdo con esto, las diferencias de nivel dn medidas corresponden con la sección de la línea de la plomada, que coincide con el eje vertical de las miras, entre la superficie terrestre y la tangente a la equipotencial realizada por el instrumento.

Ya que la separación entre dos superficies equipotenciales varía con la gravedad en proporción inversa, éstas no son paralelas y, en consecuencia, la determinación de alturas mediante la nivelación clásica se ve altamente afectada por el campo de gravedad terrestre. En la figura 1 puede observarse, por ejemplo, como la altura del punto B depende de la trayectoria de nivelación, si dicha trayectoria coincide con la *sección II* conduce a una altura mayor para el punto B , que la que se obtendría si se sigue la *sección I*. De hecho, las diferencias de nivel dn medidas en un circuito cerrado contienen, además de los errores aleatorios de observación, el llamado *error de cierre teórico* (ecuación 1), el cual impide que las alturas niveladas sean utilizadas directamente y obliga su corrección por el efecto de la gravedad o su transformación en diferencias de potencial (p. ej. Torge 2001).

$$\varepsilon = \oint dn \quad [1]$$

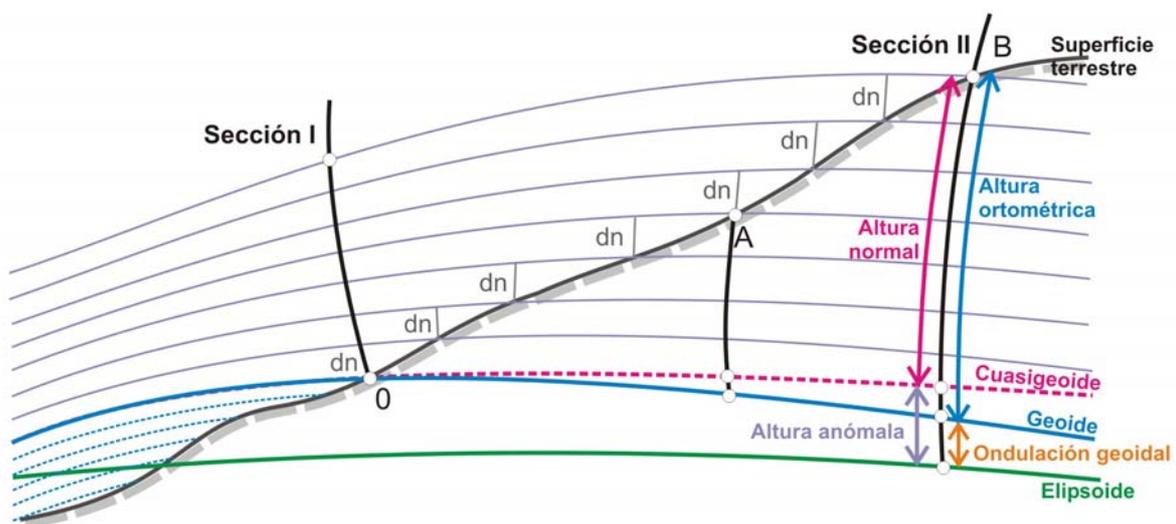


Figura 1. Nivelación geométrica y alturas físicas

Considerando que la derivada direccional del potencial corresponde con la componente del vector de fuerza en esa dirección, a lo largo de la línea de la plomada se tiene:

$$-\frac{dW}{dn} = g \quad ; \quad dW = -g dn \quad [2]$$

la cual, mediante la integración entre A y B con respecto al elemento infinitamente pequeño δn , puede escribirse como:

$$-\int_A^B dW = \int_A^B g \delta n = \hat{g}(H_B - H_A) = W_A - W_B \quad [3]$$

Así, la diferencia de nivel dn medida entre dos puntos (A , B) ubicados sobre la superficie terrestre y sobre equipotenciales diferentes (W_A , W_B) (figura 1) puede representarse a través de:

$$dn_{BA} = (H_B - H_A) = \frac{W_A - W_B}{\hat{g}} \quad [4]$$

siendo \hat{g} el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de nivelación entre las equipotenciales W_A y W_B (p. ej. Sakatov 1957).

Si el punto inicial de la medición 0 esta sobre el geoide (W_0), la diferencia de potencial se conoce como *número* o *cota geopotencial* y se define mediante:

$$C_B = W_0 - W_B = \int_0^B g \delta n \cong \sum_0^B g dn \quad [5]$$

donde g se asume como el promedio del valor de gravedad medido sobre los dos puntos nivelados consecutivamente. La determinación de C_B es unívoca, pues éste no depende de la trayectoria de nivelación y en un circuito cerrado satisface la condición $\oint dW = 0$ (Torge 2001). La unidad de medida de los números geopotenciales es el *kiloGal por metro* [kGal m], que equivale a [10 m² s⁻²].

La altura de B se obtiene, entonces, a partir de:

$$H_B = \frac{W_0 - W_B}{\hat{g}} = \frac{C_B}{\hat{g}} \quad [6]$$

\hat{g} es el valor medio de la gravedad entre la superficie de referencia (W_0) y el punto nivelado (W_B). Como la diferencia ($W_0 - W_B$) es constante, la altura de B depende del valor de \hat{g} utilizado; así, en función de su estimación, se habla de diferentes tipos de alturas físicas, a saber: dinámicas, ortométricas y normales. Éstas se obtienen a partir de los números geopotenciales ajustados bajo la condición $\oint dW = 0$ ó, mediante la aplicación de correcciones métricas a las diferencias de nivel medidas $\oint dn \neq 0$, de modo que se conviertan en cantidades físicas y sean ajustadas satisfaciendo la misma condición de los números geopotenciales. La tabla 1 presenta esquemáticamente las principales características de los diferentes sistemas de alturas.

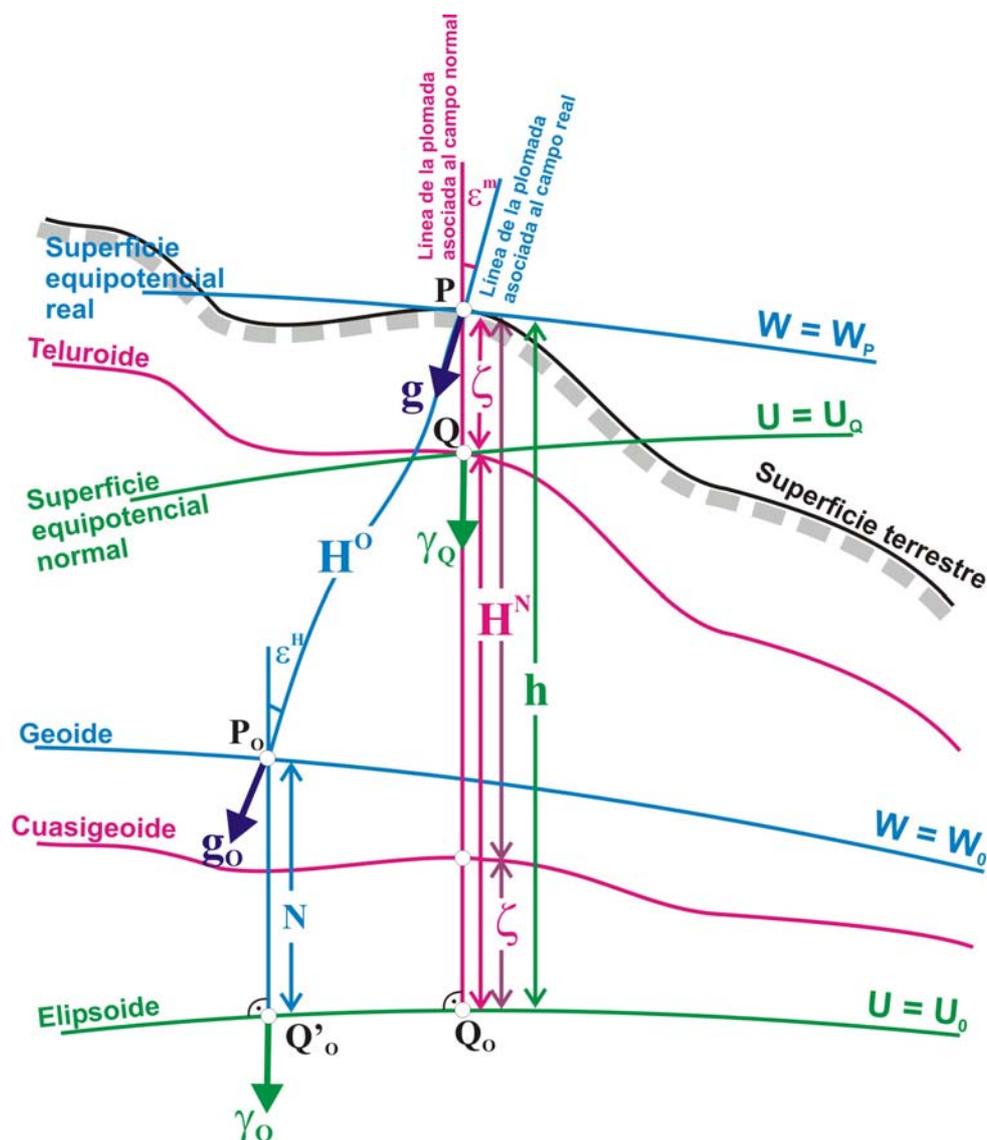


Figura 2. Alturas ortométricas y normales (tomado de Kuhn 2000)

2. CÁLCULO DE LAS ALTURAS FÍSICAS

2.1 Números geopotenciales y alturas dinámicas

La determinación de los números geopotenciales requiere, además de las diferencias de nivel medidas, los valores de gravedad correspondientes a los puntos nivelados. Dado que la distribución de las estaciones gravimétricas no es tan densa como la de aquellos, normalmente, se aplican métodos de interpolación que permitan estimar dichos valores. En este sentido, con el propósito de minimizar la influencia de la interpolación en la precisión final de las alturas físicas, en el presente ejercicio se introduce como condición, que el error generado por los valores de gravedad en los números geopotenciales sea 100 veces menor que el causado por las diferencias de nivel medidas. De este modo, el máximo error contenido en las alturas físicas por cuenta de los valores de gravedad interpolados estaría en el orden de décimas de milímetro.

Tabla 1. Características principales de los diferentes tipos de alturas físicas

	Alturas dinámicas	Alturas ortométricas	Alturas normales
Definición de \hat{g}	<ul style="list-style-type: none"> γ_o^k: Valor de la gravedad normal sobre el elipsoide para una latitud φ específica (Normalmente: $\varphi = 45^\circ$) 	<ul style="list-style-type: none"> g_m: Valor promedio de la gravedad real medida a lo largo de la línea de la plomada entre el geode y el punto de observación. 	<ul style="list-style-type: none"> γ_m: Valor medio de la gravedad normal a lo largo de la línea de la plomada teórica entre el teluroide y el elipsoide, ó, en buena aproximación, entre el cuasigeoide y la superficie terrestre
Descripción	<ul style="list-style-type: none"> Números geopotenciales escalados $H^{DYN} = \frac{C}{\gamma_o^\varphi} \quad [7]$	<ul style="list-style-type: none"> Distancia, sobre la línea de la plomada real, entre el geode y el punto de observación (figura 2) $H^O = \frac{C}{g_m} \quad ; \quad g_m = \frac{1}{H^O} \int_0^{H^O} g dH^O \quad [9]$	<ul style="list-style-type: none"> Distancia, sobre la línea de la plomada teórica, entre el teluroide y el elipsoide ó, entre el cuasigeoide y el punto de observación (figura 2) $H^N = \frac{C}{\gamma_m} \quad ; \quad \gamma_m = \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} \gamma dH^N \quad [12]$
Corrección	<ul style="list-style-type: none"> Magnitudes hasta de 20 m $\Delta H_{AB}^{DYN} = \Delta n_{AB} + k_{AB}^{DYN} \quad [8]$ $k_{AB}^{DYN} = \int_A^B \frac{g - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} \delta n = \sum_A^B \frac{g - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} dn$	<ul style="list-style-type: none"> Magnitudes en el orden de [mm] a [dm] $\Delta H_{AB}^O = \Delta n_{AB} + k_{AB}^O \quad [10]$ $k_{AB}^O = \int_A^B \frac{g - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} \delta n + \frac{g_m^A - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} H_A^O - \frac{g_m^B - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} H_B^O$	<ul style="list-style-type: none"> Magnitudes en el orden de [mm] a [dm] $\Delta H_{AB}^N = \Delta n_{AB} + k_{AB}^N \quad [13]$ $k_{AB}^N = \int_A^B \frac{g - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} \delta n + \frac{\gamma_m^A - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} H_A^N - \frac{\gamma_m^B - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} H_B^N$
Particularidades	<ul style="list-style-type: none"> No tienen significado geométrico Puntos sobre la misma superficie equipotencial tienen el mismo valor de altura dinámica No se requiere de la formulación de hipótesis para su determinación 	<ul style="list-style-type: none"> Su superficie de referencia es el geode $H^O = h - N \quad [11]$ <p>h: altura elipsoidal, N: ondulación geoidal</p> <ul style="list-style-type: none"> Puntos sobre la misma superficie equipotencial difieren en la misma proporción en que varían los valores de g_m Se requiere de la formulación de hipótesis sobre la distribución de las masas terrestres internas (densidad) y sobre el gradiente vertical de gravedad ($\partial g / \partial H$) g_m puede determinarse sólo de manera aproximativa 	<ul style="list-style-type: none"> Su superficie de referencia: cuasigeoide $H^N = h - \zeta \quad [14]$ <p>h: altura elipsoidal, ζ: altura anómala</p> <ul style="list-style-type: none"> Puntos sobre la misma superficie equipotencial y a la misma latitud (paralelo), tienen alturas normales idénticas, de lo contrario, éstas varían según el cambio de γ_m con respecto a la latitud No se requiere de la formulación de hipótesis para su determinación γ_m puede determinarse con exactitud

Según la ley de propagación de errores, el error de los números geopotenciales m_C , en función de las diferencias de nivel Δn , los valores de gravedad g y sus errores respectivos, $m_{\Delta n}$ y m_g , está dado por:

$$m_C^2 = g^2 m_{\Delta n}^2 + \Delta n^2 m_g^2 \quad [15]$$

$m_{\Delta n}$ ha sido definido, en Colombia, para las líneas de nivelación de primer orden en $\pm 4 \text{ mm} \cdot \sqrt{s[\text{km}]}$ (siendo s la sección de nivelación en kilómetros). Si, consecuentemente, se satisface la condición $(g^2 m_{\Delta n}^2) > (\Delta n^2 m_g^2 * 100)$, las magnitudes máximas de m_g son:

Tabla 2. Precisiones requeridas en los valores de gravedad para la determinación de números geopotenciales

Altura en que la diferencia de nivel es medida [m]	m_g para $s = 1 \text{ km}$ [10^{-5} m s^{-2}]	m_g para $s = 2 \text{ km}$ [10^{-5} m s^{-2}]
10	400	566
20	200	283
30	133	189
40	100	141
50	80	113
70	57	81
100	40	57
200	20	28
500	8	11
1000	4	8
2000	2	4
4000	1	2

En el presente trabajo la interpolación de los valores de gravedad para los puntos de nivelación se adelanta mediante el método de los mínimos cuadrados (denominado también predicción o colocación (Drewes 1976)) utilizando las anomalías simples de Bouguer. La información gravimétrica básica corresponde con más de 80 000 puntos de gravedad distribuidos sobre el territorio colombiano, referidos a SIGNAR (Sistema Gravimétrico Nacional de Referencia, Sánchez 1996) y cuyos valores de anomalía han sido determinados sobre el elipsoide GRS80 (Geodetic Reference System 1980) (Moritz 1980). Los números geopotenciales se calculan según la relación [5] y, posteriormente, se convierten en alturas dinámicas (ecuación [7]) utilizando la gravedad normal para la latitud convencional ($\varphi = 45^\circ \text{ N}$) y una más conveniente ($\varphi = 0^\circ$) para la ubicación geográfica de Colombia.

2.2 Alturas ortométricas

Las alturas ortométricas, y por tanto su precisión, dependen del gradiente vertical de gravedad con el que el valor g_m es estimado, el cual, a su vez, está en función de la hipótesis asociada a la distribución interna de masas (densidad). De acuerdo con la ecuación [9] el error δH^o causado en la altura ortométrica por un error δg_m en el valor de gravedad es (Leismann et al. 1992):

$$\delta H^o = -\frac{C}{g_m^2} \delta g_m = -\frac{H^o}{g_m} \delta g_m \quad [16]$$

Si $\delta g_m = \pm 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$, una altura ortométrica de 1000 m tendría una inconsistencia de ± 10 cm. A su vez, el error generado en g_m por el uso de una densidad de masas inapropiada en la formulación de la hipótesis correspondiente, está dado por:

$$g_m = g - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial H} + 2\pi G \rho \right) H^o \quad ; \quad \delta g_m = -2\pi G H^o \delta \rho \quad [17]$$

siendo G la constante gravitacional y ρ la densidad de masas. De acuerdo con [16] y [17], si $\delta \rho = \pm 100 \text{ kg m}^{-3} = \pm 0,1 \text{ g cm}^{-3}$ y $H^o = 1000 \text{ m}$, H^o tendría un error de $\pm 4 \text{ mm}$.

De otra parte, el gradiente vertical de la gravedad real ($\partial g / \partial H$) se asume idéntico al normal ($\partial \gamma / \partial H$) calculado para la latitud $\varphi = 45^\circ$, cuyo valor equivale a $-3,086 \mu\text{ms}^{-2}$; no obstante, el gradiente verdadero varía entre $-2,0 \mu\text{ms}^{-2}$ (en zonas planas) hasta $-4,0 \mu\text{ms}^{-2}$ (en áreas montañosas) (Bodemüller 1957). La utilización indistinta de un valor constante genera discrepancias considerables, especialmente, en regiones con cambios fuertes en el relieve.

La única posibilidad de estimar g_m con alta precisión es la medición de la aceleración de la gravedad en cada punto de la línea de la plomada entre el geoide y la superficie terrestre; pero dado que esto no es viable, los geodestas se han ocupado de definir la mejor aproximación posible. Sin embargo; las diversas formulaciones conducen a sistemas diferentes de alturas ortométricas, cuya superficie de referencia (el geoide) también depende de las hipótesis consideradas, es decir, por cada tipo altura de altura ortométrica se requiere de una realización diferente del geoide. En la presente sección, se describen las metodologías más conocidas para la obtención de g_m .

a. Helmert

Hipótesis La gravedad varía linealmente con la altura; es decir, la densidad de las masas internas es constante y el gradiente vertical de la gravedad real es igual al de la teórica. El efecto de la topografía se evalúa mediante una placa de Bouguer, cuyo espesor equivale a la altura del punto H_p de observación, y es condensada en una capa infinitamente delgada sobre el geoide. g_m equivale al promedio de la gravedad medida en la superficie

terrestre g_p y la correspondiente sobre el geoide g_0 ; en la práctica dicho promedio es igual a la gravedad en la altura media del punto $g_{H/2}$.

Ecuaciones G_0 se obtiene mediante la reducción de Poincaré y Prey (Heiskanen and Moritz 1967).

$$g_m = g_{H/2} = \frac{1}{2}(g_p + g_0)$$

$$g_m = g_p + (3,086 - 0,83818\rho_p)10^{-6} \frac{H^0}{2} \quad [18]$$

Unidades $g_p, g_m, g_{H/2}, g_0 \rightarrow [m\ s^{-2}]$; $\rho_p \rightarrow [10^{-3}\ kg\ m^{-3}]$; $H^0 \rightarrow [m]$

b. Niethammer

Hipótesis Niethammer mejora la aproximación de Helmert, en el sentido que, incluye en las reducciones el efecto de los excesos o déficits de masa no considerados en la placa de Bouguer; sin embargo, las hipótesis sobre la densidad y el gradiente vertical se mantienen (Niethammer 1932). Una variación de esta propuesta son las *alturas modificadas de Niethammer*, las cuales también incorporan el efecto de las masas isostáticas (Krakiwsky and Mueller 1965).

Ecuaciones La gravedad g_Q en cualquier punto Q de la línea de la plomada, tiene dos componentes: G^Q , la cual representa la influencia conjunta de la Tierra y de la placa de Bouguer, y δg que contiene el efecto gravitacional de los excesos y déficits de masa omitidos en dicha placa mencionada. La gravedad del punto ubicado sobre la superficie terrestre también sigue este principio.

$$g_m^Q = G_m - \delta g_m = G_{H/2} - \delta g_m$$

$$g_m = (G_p + \delta g_p) + (3,086 - 0,83818\rho_p)10^{-6} \frac{H^0}{2} - \delta g_m \quad [19]$$

Los valores $\delta g_p, \delta g_m$ se tabulan en función de la altura del punto y la topografía circundante, para sectores concéntricos al punto de cálculo hasta una distancia de 42 km y divididos en ángulos de $\alpha = 45^\circ$. El efecto total es la suma de los valores individuales. (Niethammer 1932; Ledersteger 1958).

Unidades $g_p, g_m, \delta g_p, \delta g_m \rightarrow [m\ s^{-2}]$; $\rho_p \rightarrow [10^{-3}\ kg\ m^{-3}]$; $H^0 \rightarrow [m]$

c. Mader

Hipótesis La gravedad varía linealmente con la altura. El valor medio g_m se calcula según Helmert [18], pero la gravedad sobre el geoide g_0 considera la influencia de la topografía y se determina similarmente al valor g_p de Niethammer (Leismann et al. 1992).

Ecuaciones
$$\delta g = \frac{1}{2}(\delta g_p + \delta g_0)$$

$$g_m = g_p + (3,086 - 0,83818 \rho_p) 10^{-6} \frac{H_p^O}{2} + \delta g \quad [20]$$

Los valores de δg_p y δg_0 se tabulan para compartimentos concéntricos al punto de cálculo hasta una distancia de 30 km y divididos en ángulos de $\alpha = 22,5^\circ$. La suma de los aportes individuales proporciona la reducción total para obtener g_m .

Unidades $g_p, g_m, \delta g_p, \delta g_0, \delta g \rightarrow [m s^{-2}]; \rho_p \rightarrow [10^{-3} kg m^{-3}]; H^O \rightarrow [m]$

d. Mueller

Hipótesis La gravedad varía linealmente con la altura. El valor medio de gravedad g_m se calcula según Helmert [18], pero la gravedad g_0 sobre el geoide se estima con apoyo en las anomalías de Bouguer Δg_B (Krakiwsky and Mueller 1965).

Ecuaciones g_0 se deriva a partir de la reducción del valor de gravedad g_e sobre el elipsoide hasta el geoide. En este caso, se aplica el gradiente vertical con signo negativo para una distancia equivalente a la ondulación geoidal N y se calcula el efecto de la placa de Bouguer también, con un espesor equivalente a N . g_e se divide en dos partes: g_{e1} que representa la gravedad generada por las masas internas del elipsoide y g_{e2} que incluye el efecto de las masas externas. g_{e1} se estima mediante $(\gamma_o^p + \Delta g_B)$, donde γ_o^p es la gravedad normal del punto de observación y Δg_B su anomalía simple de Bouguer. g_{e2} equivale a la reducción de Bouguer para una placa de espesor $(H_p^O + N)$. De esta forma, g_m corresponde con:

$$g_m = g_p + \frac{1}{2} \delta g_p + (3,086 - 0,83818 \rho_p) 10^{-6} \frac{H_p^O}{2} \quad [21]$$

Unidades $g_p, g_m, \delta g_p \rightarrow [m s^{-2}]; \rho_p \rightarrow [10^{-3} kg m^{-3}]; H^O \rightarrow [m]$

e. Ramsayer

Comentario Los métodos propuestos por Ramsayer, Ledersteger y Baranov se basan en la minimización de la corrección métrica [ecuación 10], de modo que las desviaciones de las alturas ortométricas con respecto a las niveladas sean tan pequeñas, que en aplicaciones de baja precisión, dichas correcciones puedan ser omitidas. Ramsayer (1953, 1954) presenta tres alternativas para la estimación de g_m .

Primer método de Ramsayer

Hipótesis El error de cierre teórico [ecuación 1] es dividido en una componente constante, que contiene el promedio aritmético de las alturas ortométricas \hat{H}^O del circuito de nivelación y una componente complementaria, que representa las desviaciones de cada punto con respecto a \hat{H}^O . El error de cierre teórico se resuelve según Helmert con una buena aproximación de g_m [ecuación 18].

Ecuaciones

$$g_m = \frac{1}{2}(g_p + g_0) - (g_0 - g_0^{AP}) \frac{\hat{H}^O}{H_p^O}$$
$$g_m = g_p + (3,086 - 0,41909 \rho_p) 10^{-6} \frac{H_p^O}{2} - \frac{\hat{H}^O}{H_p^O} [(g_p - g_{AP}) + 3,086 \times 10^{-6} (H_p^O - H_{AP}^O)] - \frac{\hat{H}^O}{H_p^O} [0,41909 \times 10^{-6} (\rho_p H_p - \rho_{AP} H_{AP})] \quad [22]$$

El índice AP identifica el punto de inicio del circuito de nivelación. \hat{H}^O corresponde con:

$$\hat{H}^O = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^O$$

Unidades $g_p, g_m, g_{AP} \rightarrow [\text{ms}^{-2}]; \rho_p, \rho_{AP} \rightarrow [10^{-3} \text{kgm}^{-3}]; H_p^O, H_{AP}^O, \hat{H}^O, H_p, H_{AP} \rightarrow [\text{m}]$

Segundo método de Ramsayer

Hipótesis En este caso se asume $\hat{H}^O = 0$; así, las variaciones de la gravedad en el circuito de nivelación son tan pequeñas que pueden ser omitidas. Dado que, para el efecto, se asume una densidad constante y una topografía

plana, esta hipótesis es idéntica a la de Helmert, sólo que la determinación de la gravedad g_0 sobre el geoide es diferente.

Ecuaciones

$$g_m = g_p + (3,086 - 0,41909 \rho_p) 10^{-6} \frac{H_p^O}{2} \quad [23]$$

Unidades $g_p, g_m \rightarrow [m s^{-2}]; \rho_p \rightarrow [10^{-3} kg m^{-3}]; H_p^O \rightarrow [m]$

Tercer método de Ramsayer

Hipótesis El gradiente vertical normal es constante y los campos de gravedad real y teórico son idénticos, lo que equivale a decir que, el valor promedio de gravedad g_m es igual a la gravedad teórica del punto en su altura media $\gamma_{H/2}^o$.

Ecuaciones

$$g_m = \gamma_o^o - \frac{1}{2} (3,086 - 0,41909 \rho_p) 10^{-6} H_p^O \quad [24]$$

Unidades $g_m, \gamma_o^o \rightarrow [m s^{-2}]; \rho_p \rightarrow [10^{-3} kg m^{-3}]; H_p^O \rightarrow [m]$

f. Ledersteger

Hipótesis La Tierra se asume como una esfera con distribución homogénea de masas; de esta forma, la gravedad es independiente de la latitud y sólo está en función de la altura (Ledersteger 1956).

Ecuaciones Los valores de gravedad g_i observados sobre la superficie terrestre son reducidos al geoide utilizando el gradiente vertical normal y posteriormente, son promediados. La substracción de este valor medio a cada gravedad observada g_i proporciona la cantidad g_m correspondiente.

$$g_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g_i + 3,086 \times 10^{-6} H_i^O) - \frac{1}{2} 3,086 \times 10^{-6} \frac{H_p^O}{2} \quad [25]$$

Unidades $g_m, g_i \rightarrow [m s^{-2}]; H_i^O, H_p^O \rightarrow [m]$

g. Baranov

Hipótesis Los campos de gravedad real y teórico son idénticos y tienen el mismo gradiente vertical. Así, la gravedad g_0 sobre el geoide puede reemplazarse con la normal γ_o^o y g_m depende sólo de la altura (Leismann et al. 1992).

Ecuaciones

$$g_m = \frac{1}{2} (g_p + \gamma_o^o) \quad [26]$$

Unidades $g_m, \gamma_o^p \rightarrow [\text{m s}^{-2}]$

2.3 Alturas normales

Las alturas normales, al contrario de las ortométricas, pueden ser determinadas unívocamente, ya que no requieren de la formulación de hipótesis en la estimación del valor medio de gravedad \hat{g} . Su precisión depende de las diferencias de nivel medidas, de los valores de gravedad observada o interpolada, de la latitud del punto de medición y de la precisión de la fórmula de gravedad teórica; por tanto, su evaluación numérica se centra en la mejor aproximación discreta de la integral contenida en la ecuación [12]. Las versiones más conocidas de dicha aproximación son:

a. Molodenski

Ecuaciones

$$\gamma_m = \gamma_o + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_o H^N + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2} \right)_o (H^N)^2 + \dots$$

la cual, en función de los parámetros del elipsoide, puede escribirse como:

$$\gamma_m = \gamma_o^p \left[1 - \left(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi \right) \frac{H^N}{a} + \frac{(H^N)^2}{a^2} \right] [\text{ms}^{-2}] \quad [27]$$

siendo:

- γ_o^p gravedad normal sobre el elipsoide del punto de observación
- $\partial g / \partial H$ gradiente de la gravedad normal
- a semieje mayor
- f achatamiento geométrico
- m relación entre la fuerza de atracción gravitacional y la centrífuga en el ecuador

Comentario La ecuación [27] debe evaluarse iterativamente, dada la dependencia de la gravedad normal media γ_m en función de la altura normal H^N .

b. Vignal

Ecuaciones

$$\gamma_m \approx \gamma_o^p - 3,086 \times 10^{-6} \frac{H^N}{2} [\text{ms}^{-2}] \quad [28]$$

Comentario Se omiten los términos no lineales de la ecuación [27] y se utiliza el promedio global del gradiente normal de gravedad.

c. Bomford

Ecuaciones
$$\gamma_m \approx \gamma_o^{45} - 3,086 \times 10^{-6} \frac{H^N}{2} \quad [\text{ms}^{-2}] \quad [29]$$

Comentario La gravedad normal sobre el elipsoide γ_o^φ del punto de observación se sustituye con la gravedad de la latitud $\varphi = 45^\circ$.

d. Hirvonen

Ecuaciones De acuerdo con la ecuación [12] y los parámetros del elipsoide GRS80 (Moritz 1980), se tiene:

$$\begin{aligned} H^N = & \frac{C}{\gamma_o} + \\ & + \left[\frac{C}{\gamma_o} \right]^2 (1,578\,576 \cdot 10^{-7} - 1,029\,316 \cdot 10^{-9} \sin^2 \varphi^N + 1,664\,32 \cdot 10^{-11} \sin^4 \varphi^N) \\ & + \left[\frac{C}{\gamma_o} \right]^3 (2,4761 \cdot 10^{-14} - 2,01 \cdot 10^{-16} \sin^2 \varphi^N) \quad [\text{ms}^{-2}] \end{aligned} \quad [30]$$

siendo φ^N la latitud normal (figura 3), la cual se obtiene mediante:

$$\varphi - \varphi^N \approx -0,00017' \sin(2\varphi) H^N \quad [31]$$

Comentario Introducción de la latitud geográfica normal φ^N , con el propósito de mejorar la precisión de H^N .

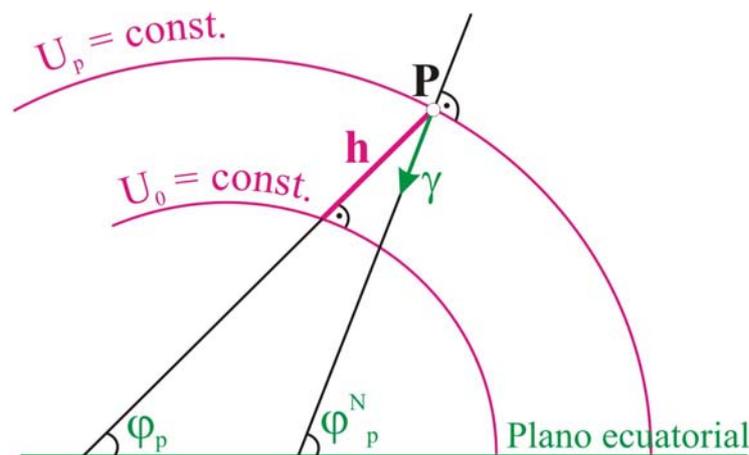


Figura 3. Latitud geográfica normal φ^N

3. EJERCICIO NUMÉRICO

3.1 Información utilizada

a. Datos de nivelación

La realización del datum vertical clásico en Colombia corresponde con el nivel medio del mar registrado en Buenaventura [3,8° N, 77,0° W], durante los períodos de enero de 1942 a diciembre de 1951, de enero a diciembre de 1955 y de enero de 1957 a agosto de 1959 (IGAC 1960; García y Cuervo 1978). A partir de este mareógrafo, el Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC) ha extendido el control vertical en el país mediante líneas de nivelación a lo largo de las carreteras nacionales, siguiendo los estándares técnicos del Servicio Geodésico Inter Americano (IAGS: Interamerican Geodetic Service). Para el efecto, se definieron tres niveles de precisión: primer orden: $\pm 4\text{mm}\sqrt{s}$ [km], segundo orden: $\pm 8\text{mm}\sqrt{s}$ [km] y tercer orden: $\pm 12\text{mm}\sqrt{s}$ [km]. En la actualidad, las líneas de nivelación contienen más de 20 000 puntos a lo largo de 26 000 km (figura 4).

Dado que la precisión de las alturas niveladas satisfizo las especificaciones de la cartografía, el efecto del campo de gravedad terrestre fue omitido; lo que significa que las alturas actuales (oficiales) son cantidades puramente geométricas, sin reducciones gravimétricas, que en circuitos de nivelación han sido ajustadas como redes verticales. Dichas alturas fueron procesadas, inicialmente, línea por línea, posteriormente, en 1985, se adelantó un ajuste en bloque de las observaciones existentes hasta esa fecha. Las mediciones subsiguientes han sido ajustadas línea por línea y adicionadas al banco de datos correspondiente. El ajuste de 1985 muestra que las correcciones por kilómetro están entre 3 mm y 15 mm, cantidades explicables, dado que la influencia del campo de gravedad, al ser omitida, se asumió como un error de observación. En este sentido, no es posible transformar directamente las alturas actuales en cantidades físicas; por el contrario, es necesario procesar las diferencias de nivel medidas (originales) en combinación con valores de gravedad.

La densificación y extensión de las líneas de nivelación no han seguido algún orden específico y los puntos de inicio y cierre no corresponden con nodos definidos estrictamente, sino con estaciones contenidas en circuitos ya nivelados; de allí, un ajuste global exige el examen cuidadoso y detallado de las carteras de campo. Igualmente, la secuencia de observación de las líneas de nivelación no ha sido ni regular, ni sistemática, lo que genera que algunos circuitos de nivelación contengan desniveles medidos con diferencias de tiempo hasta de 40 años. De hecho, algunos de los circuitos nivelados en más de una oportunidad muestran diferencias de varios centímetros en desniveles comunes, lo que podría entenderse como una consecuencia de los errores de medición o de movimientos verticales de la corteza; infortunadamente, la clasificación pertinente aún no es posible.

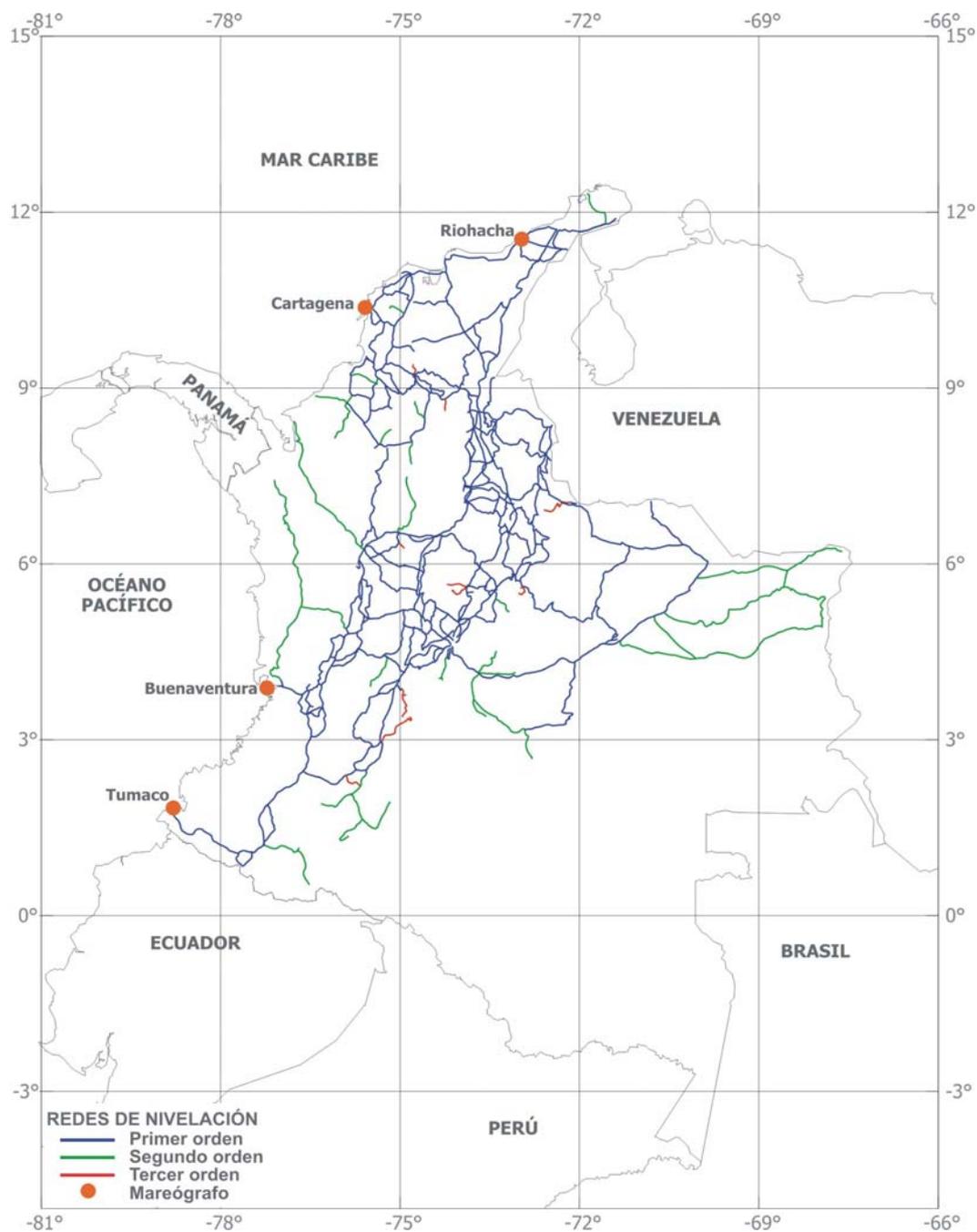


Figura 4. Redes de nivelación en Colombia

b. Datos de gravedad

La red gravimétrica de Colombia SIGNAR (Sistema Gravimétrico Nacional de Referencia) está compuesta por tres estaciones absolutas y tres subredes, las cuales han sido clasificadas según su precisión (Sánchez 2003). La red de primer orden contiene 40 estaciones, cuyas precisiones están entre $\pm 3 \text{ nms}^{-2}$ y $\pm 178 \text{ nms}^{-2}$. La red de segundo orden incluye cerca de 30 puntos con precisiones en torno a $\pm 0,50 \mu\text{ms}^{-2}$ (figura 5). La red de tercer orden ha sido establecida sobre las líneas de nivelación, lo que hace que, aproximadamente, el 55% de los puntos nivelados cuente con valor de gravedad observada, sus precisiones oscilan al rededor

de $\pm 1 \mu\text{ms}^{-2}$ (figura 6). Las redes de primer y segundo orden han sido vinculadas a las redes homólogas en los países vecinos, incluyendo tres estaciones absolutas en Venezuela (McConnell et al 1995; Sánchez 1996). El datum gravimétrico corresponde con el realizado por IAGBN International Absolute Gravity Basestation Network, Boedecker and Fritzer 1986).

Las redes de SIGNAR han sido complementadas con datos provenientes de proyectos geofísicos, cuya información gravimétrica ha sido normalizada a IAGBN (Sánchez 2003). En total, se cuenta con más de 90 000 valores terrestres de gravedad (figura 7), que sirven de referencia para la interpolación requerida en la determinación de los números geopotenciales.



Figura 5. SIGNAR: estaciones absolutas de gravedad y red gravimétrica de primer orden

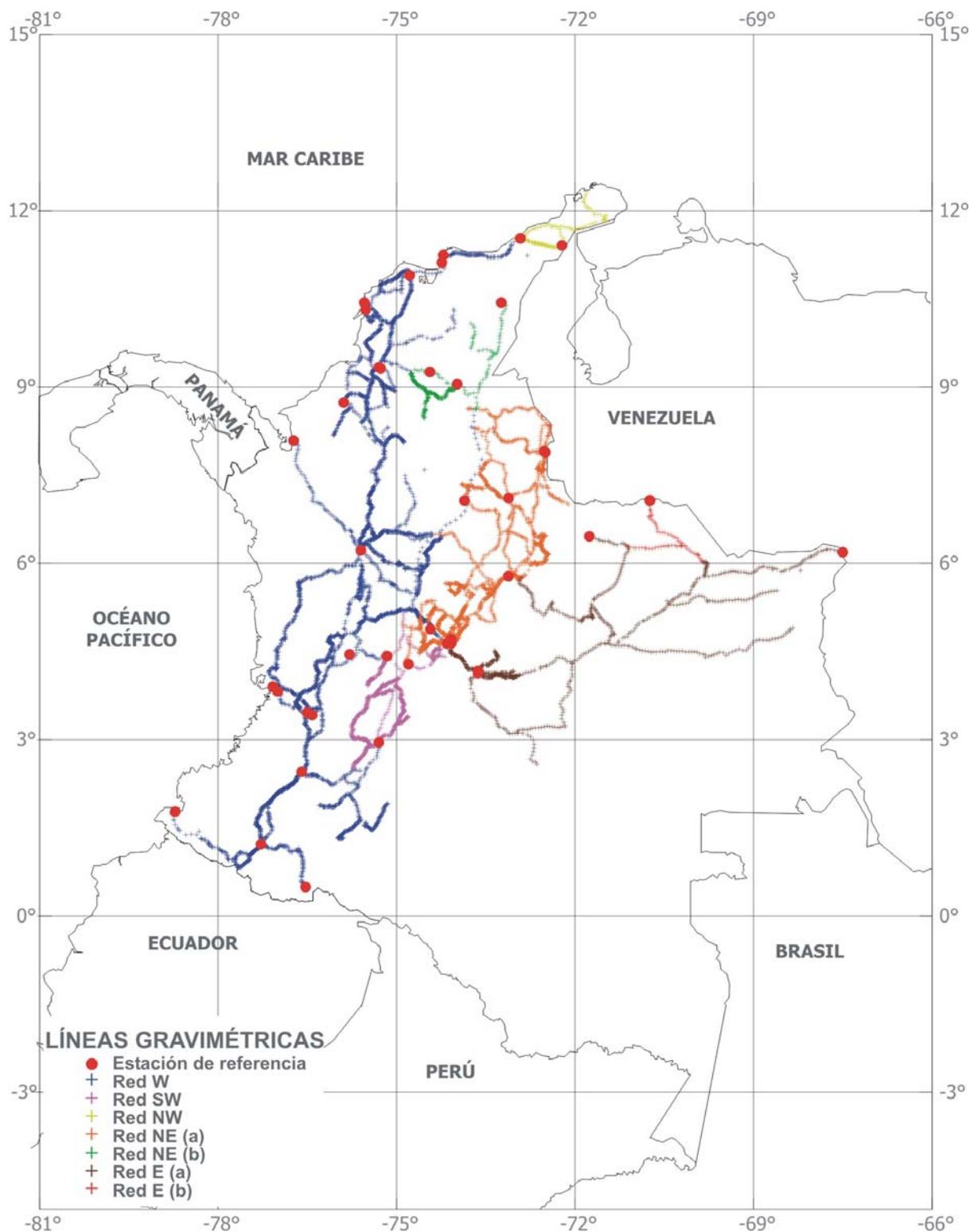


Figura 6. SIGNAR: red gravimétrica de tercer orden (tomado de Sánchez 2003)

En consecuencia, el presente documento se ocupa del cálculo de números geopotenciales y de la estimación de \hat{g} , dejando de lado la determinación de las correcciones métricas mencionadas en la tabla 1. En la práctica, dichas correcciones equivalen a las diferencias entre las alturas niveladas y las físicas derivadas de las cotas geopotenciales.

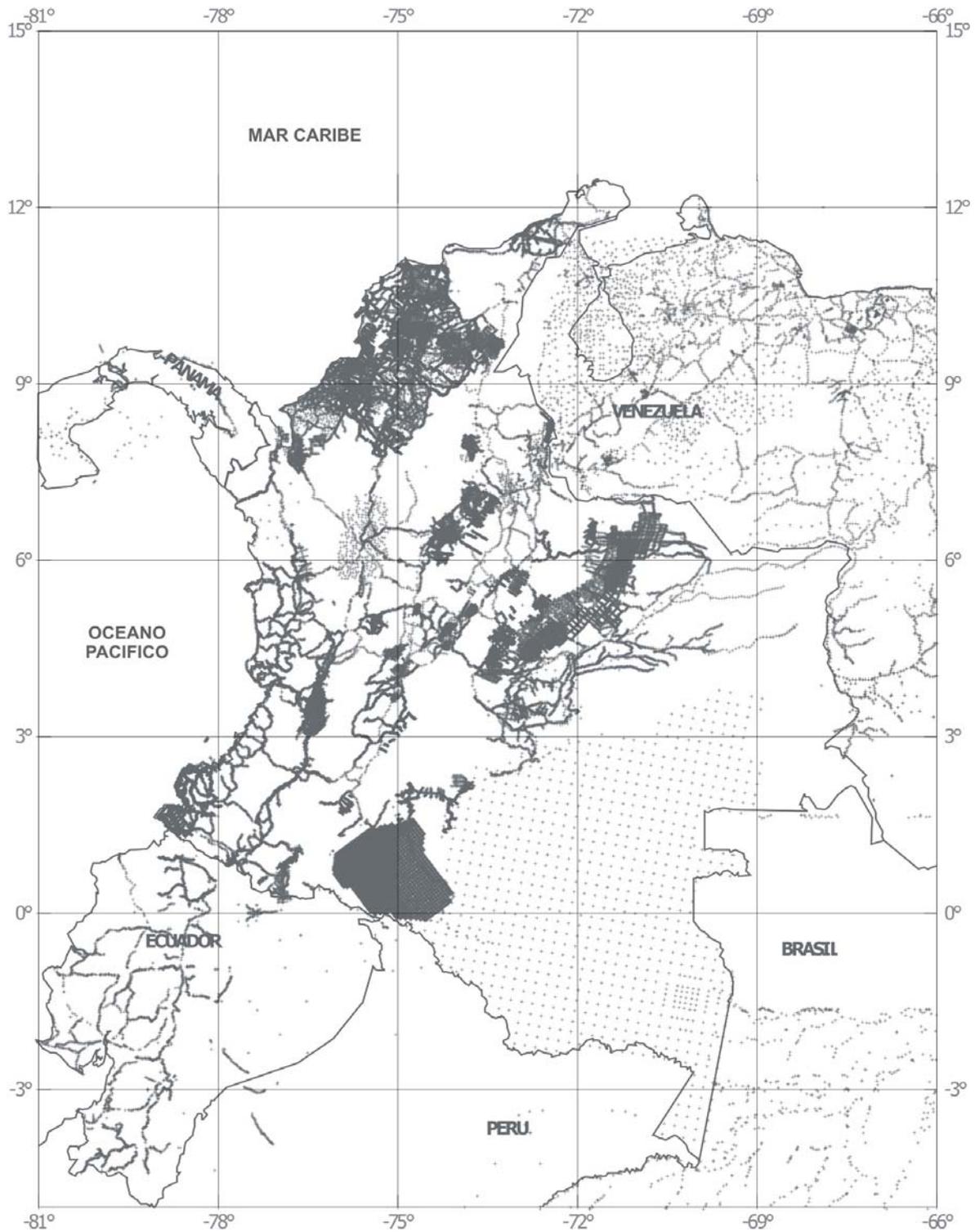


Figura 7. Información gravimétrica terrestre disponible en Colombia

c. Circuitos de nivelación

Para este ejercicio, se han seleccionado 46 líneas de nivelación de primer orden, en cinco circuitos cerrados, que cubren regiones tanto planas como montañosas (figura 8). La tabla 3 muestra las principales características de cada uno de ellos.

3.2 Comentarios sobre los cálculos numéricos

Uno de los objetivos principales de este ejercicio es identificar la forma más conveniente para la migración, a alturas físicas, de las alturas utilizadas actualmente en los países de América del Sur. Si bien, la recomendación oficial del Comité SIRGAS es la adopción de alturas nomales (componente física) y elipsoidales (componente geométrica) dentro de un nuevo sistema vertical de referencia unificado en la región (Drewes et al. 2002), cada país debe ponderar qué tipo de alturas físicas más le conviene y hacer la adopción correspondiente. De allí, es importante que la obtención de las alturas seleccionadas se realice a través de números geopotenciales, de modo que la concepción de *sistema unificado* se mantenga. El procedimiento ideal sería calcular los números geopotenciales en cada uno de los países, hacer un ajuste continental de los mismos a partir de un valor W_0 definido globalmente y, por último, convertir dichos números en las alturas físicas señaladas individualmente por cada país.

Las alturas ortométricas se obtienen siguiendo los métodos expuestos por Helmert, Ramsayer, Baranov y Ledersteger. Para el efecto, se utiliza el valor convencional de densidad de masas $\rho = 2670 \text{ kg m}^{-3}$, puesto que los análisis geológicos existentes en Colombia no están distribuidos regularmente y sólo alcanzan algunos metros de profundidad, haciendo que las densidades obtenidas no sean representativas para todo el *recorrido* de la línea de la plomada. Las alturas de Niethammer, Mader y Mueller no son consideradas en este ejercicio, dada su alta dependencia de la topografía circundante al punto de cálculo. Las alturas normales son obtenidas según las aproximaciones presentadas por Molodenski, Vignal, Bomford y Hirvonen. El campo de gravedad normal utilizado es el del elipsoide GRS80 (Moritz 1980).

Como punto de partida para el cálculo de los números geopotenciales se toma el más cercano al mareógrafo de Buenaventura, su potencial se define como la multiplicación de su valor de gravedad con la diferencia de nivel al mareógrafo mencionado:

$$C_{71W3} = 74,9998 \text{ m} \times 9,779\,780 \text{ ms}^{-2} = 73,3482 \cdot 10 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$$

Tabla 3. Características de los circuitos de nivelación seleccionados para el cálculo de alturas físicas en Colombia

No.	Extensión [km]	Puntos	Altura mínima [m]	Altura máxima [m]	Recorrido
I	1 364	1 098	0	350	Puerta de Hierro, La Mata, Maicao, Cartagena
II	1 222	981	15	2 770	La Mata, Barrancabermeja, Medellín, Puerta de Hierro
III	1 820	1 460	15	3 950	Bogotá, Medellín, Barrancabermeja, La Mata, Cúcuta
IV	1 640	1 266	170	3 500	Medellín, Cali, Ibagué, Bogotá
V	1 143	959	5	2 500	Buenaventura (mareógrafo), Cali, Medellín, Quibdó

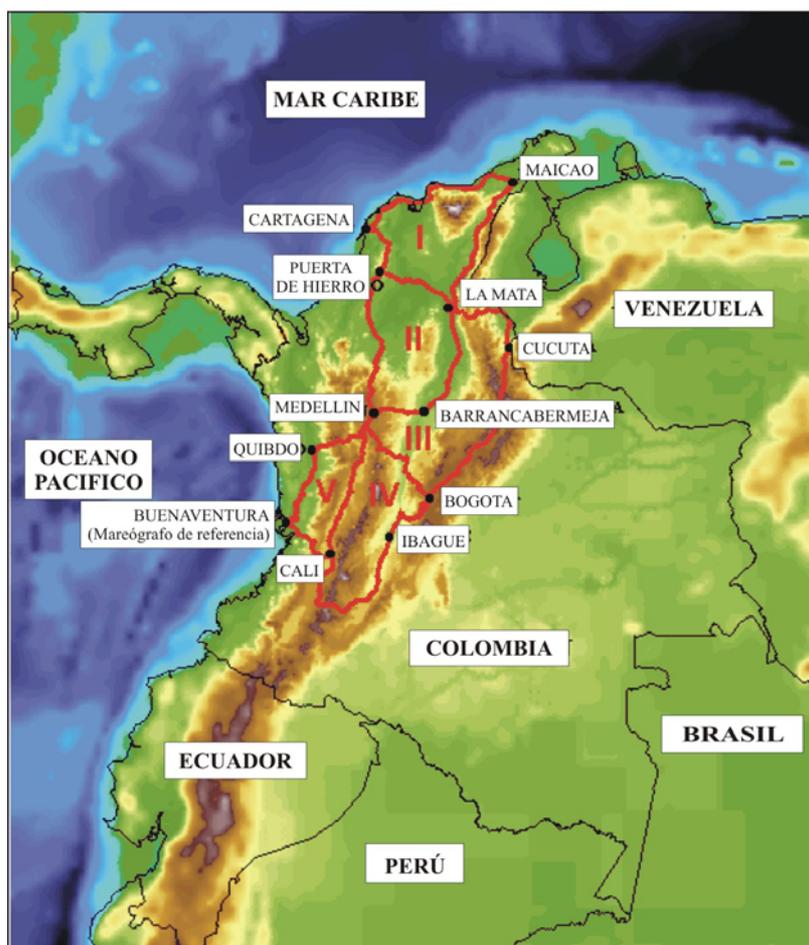


Figura 8. Circuitos de nivelación seleccionados para el cálculo de alturas físicas en Colombia

3.3 Resultados numéricos

a. Números geopotenciales y alturas dinámicas

Dado que los números geopotenciales no contienen el error de cierre teórico [1] y, que su determinación no requiere de la formulación de hipótesis, los errores de cierre en los circuitos de medición son causados exclusivamente por las imprecisiones contenidas en los valores de gravedad (medidos o interpolados) y en las diferencias de nivel observadas. La tabla 4 muestra los errores de cierre, para cada uno de los circuitos seleccionados, según las diferencias de nivel medidas y las diferencias de potencial correspondientes.

En general, los errores de cierre determinados a partir de las diferencias de altura o de potencial son similares, excepto para el circuito II, en el cual el error de cierre obtenido con las diferencias de potencial se reduce a la mitad de su equivalente derivado de las diferencias de altura, quizás, porque el perfil topográfico que sigue es el más suave, pues a pesar de que contiene alturas hasta de 3000 m, las variaciones verticales máximas son menores que 300 m. Los máximos errores de cierre se presentan en los circuitos más largos (III y IV), los cuales a su vez, contienen las variaciones de altura más extremas (entre 15 m y 4000 m), estas dos condiciones reflejan la acumulación de los errores de observación en distancias largas y la

acentuada influencia del campo de gravedad generada por el fuerte contraste de densidades en las áreas montañosas.

Las alturas dinámicas son calculadas, tanto con la latitud convencional $\varphi = 45^\circ$, como con $\varphi = 0^\circ$. En el primer caso, las correcciones varían entre -1 182,52 cm y -6,47 cm, identificándose una fuerte correlación entre éstas y la topografía [ver Anexo]. La figura 9a muestra la distribución estadística correspondiente, el [59%] de las correcciones está entre 0 cm y -200 cm, el [37%] entre -200 cm y -800 cm y el [4%] alcanza las correcciones mayores.

Tabla 4. Errores de cierre de los circuitos de nivelación seleccionados

Circuito	Nodos	S [km]	Σdn [m]	$\Sigma \Delta C$ [$10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$]
I	A66CW8			
	4TE4	282,12	-130,9916	-128,1267
	A88CE4	8,70	+81,8745	+80,0823
	A66CW8	1072,93	+49,4089	+48,3349
	Σ	1363,75	+0,2918	+0,2905
II	A66CW8			
	4TE4	282,12	-130,9916	-128,1267
	A23CW6	467,47	+1333,9722	+1304,4818
	A66CW8	472,01	-1202,8411	-1176,3472
	Σ	1221,60	+0,1395	0,0079
III	4TE4			
	14NE	848,95	+2498,3880	+2442,8542
	A186CW5	472,17	-1070,4443	-1046,3823
	A23CW6	33,00	-92,6842	-90,6226
	4TE4	467,47	-1333,9722	-1304,4818
Σ	1821,59	+1,2873	+1,3675	
IV	A170CW5			
	1W1	411,80	-774,6505	-757,4201
	14NE	729,16	+1548,5479	+1513,8422
	A186CW5	472,17	-1070,4443	-1046,3831
	A170CW5	24,80	+296,3064	+289,7015
Σ	1637,93	-0,2405	-0,2595	
V	A170CW5			
	71W3	578,85	-1701,7284	-1664,1066
	1W1	152,29	+927,4507	+906,9982
	A170CW5	411,80	+774,6505	+757,4201
	Σ	1142,94	+0,3728	+0,3117

La determinación de las alturas dinámicas con la latitud de referencia $\varphi = 0^\circ$ muestra una disminución sustancial de la dependencia con respecto a la topografía [ver Anexo], los valores extremos de corrección oscilan entre -166,70 y +17,20, estando la mayoría [64%] entre -20 cm y 0 cm (figura 9b). La tabla 5 muestra el resumen de las correcciones dinámicas obtenidas en general, mientras que la tabla 6 presenta algunos ejemplos en función de la latitud y la altura de los puntos evaluados.

La relación entre $H_{0^\circ}^{DYN}$ y $H_{45^\circ}^{DYN}$ está dada mediante:

$$\Delta H_{0^\circ-45^\circ}^{DYN} = H_{\varphi=0^\circ}^{DYN} - H_{\varphi=45^\circ}^{DYN} = \left[\frac{\gamma_o^{45^\circ} - \gamma_o^{0^\circ}}{\gamma_o^{0^\circ} \gamma_o^{45^\circ}} \right] C \cong 2,679 \cdot 10^{-4} [ms^{-2}] C$$

La diferencia entre ellas, $\Delta H^{DYN}_{0^{\circ}-45^{\circ}}$, alcanza variaciones hasta de 900 cm, las cuales obedecen a la influencia de la latitud de referencia en el cálculo de la corrección dinámica. La distribución estadística de dichas diferencias se ilustra en la figura 10.

Tabla 5. Indicadores estadísticos de las correcciones dinámicas

Corrección	Indicador	Circuito I	Circuito II	Circuito III	Circuito IV	Circuito V	Total
Dinámica para $\varphi=0^{\circ}$	Máximo [cm]	-9,70	-2,14	9,78	17,62	4,54	17,62
	Mínimo [cm]	-16,44	-83,81	-166,70	-148,73	-59,42	-166,70
	Promedio [cm]	-15,03	-16,77	-28,56	-20,75	-10,65	-19,99
Dinámica para $\varphi=45^{\circ}$	Máximo [cm]	-16,18	-12,78	-9,51	-35,94	-6,47	-6,47
	Mínimo [cm]	-101,21	-814,56	-1182,00	-1050,82	-704,15	-1182,00
	Promedio [cm]	-35,86	-144,11	-362,12	-367,90	-195,25	-232,52

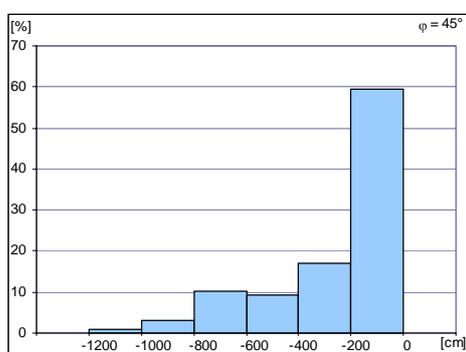


Figura 9a. Corrección dinámica para $\varphi = 45^{\circ}$

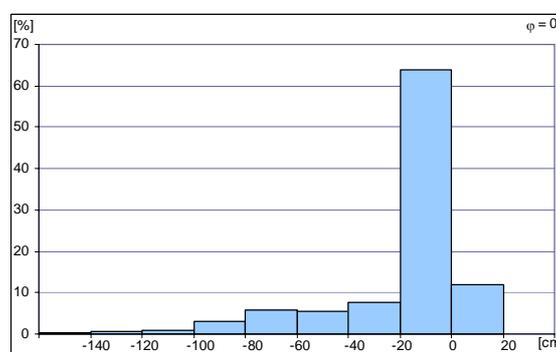


Figura 9b. Corrección dinámica para $\varphi = 0^{\circ}$

Figura 9. Histogramas de las correcciones dinámicas obtenidas a partir de diferentes latitudes de referencia

Tabla 6. Ejemplos de las correcciones dinámicas obtenidas para puntos de altura similar en latitudes diferentes

Latitud [°]	Altura [m]	$K_{\varphi=0^{\circ}}^{DYN}$ [cm]	$K_{\varphi=45^{\circ}}^{DYN}$ [cm]
11,50 N	4,30	-17,49	-16,42
4,16 N	4,55	-5,43	-6,77
10,87 N	305,05	-11,17	-91,64
3,78 N	298,43	-1,54	-80,27
6,54 N	1009,08	-10,67	-276,86
3,53 N	1001,45	-8,45	-272,65
6,89 N	2428,38	-66,19	-706,70
2,32 N	2434,66	-74,00	-176,16
7,01 N	3474,57	-136,51	-1052,94
2,40 N	3420,57	-148,73	-1050,82

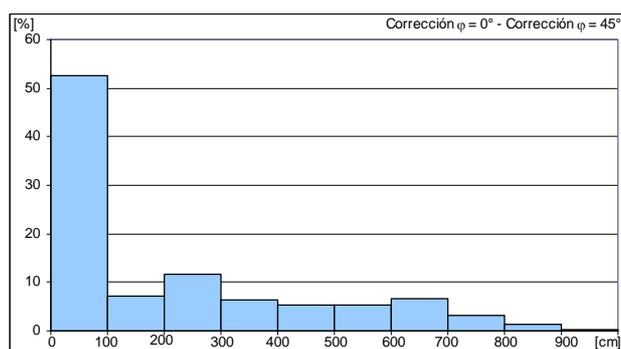


Figura 10. Diferencias entre las correcciones dinámicas calculadas a partir de latitudes de referencia diferentes

b. Alturas ortométricas

Las correcciones ortométricas son, en general, menores que las dinámicas (tabla 7). De los métodos evaluados (Helmert, Ramsayer, Baranov y Ledersteger), Helmert presenta las mayores variaciones y la correlación más fuerte con la topografía [ver Anexos del 1 al 5]. Las dos primeras aproximaciones de Ramsayer varían dentro del mismo intervalo (de -20 cm a +40 cm), pero la distribución estadística de las correcciones es diferente (figura 11): en la primera aproximación, el valor absoluto de las correcciones es ~10 cm menor que el de las obtenidas a través de la segunda aproximación. Adicionalmente, en las zonas montañosas medias y altas, las correcciones del segundo método están por encima de las del primero; mientras que en las áreas planas su comportamiento es contrario. La tercera aproximación de Ramsayer conduce a los valores de corrección más negativos; de hecho, es el único método que genera correcciones menores que -20 cm.

Tabla 7. Indicadores estadísticos de las correcciones ortométricas

Corrección	Indicador	Circuito I	Circuito II	Circuito III	Circuito IV	Circuito V	Total
Helmert	Máximo [cm]	-15,51	39,03	93,34	101,07	38,46	101,07
	Mínimo [cm]	-16,98	-16,35	-2,67	5,50	-6,13	-16,98
	Promedio [cm]	-16,19	-4,46	21,38	26,71	4,69	7,74
Ramsayer I	Máximo [cm]	-15,60	-2,11	34,25	12,00	11,18	34,25
	Mínimo [cm]	-16,53	-18,07	8,23	-1,52	-6,91	-18,07
	Promedio [cm]	-16,14	-11,56	20,35	4,10	1,04	0,12
Ramsayer II	Máximo [cm]	-15,81	5,03	35,00	36,50	11,67	36,50
	Mínimo [cm]	-17,10	-16,48	-4,87	-4,87	-6,78	-17,10
	Promedio [cm]	-16,26	-9,00	5,91	13,38	-0,65	-0,84
Ramsayer III	Máximo [cm]	-15,43	-2,71	9,24	17,58	4,92	17,58
	Mínimo [cm]	-16,84	-27,25	-47,73	-34,25	-13,34	-47,73
	Promedio [cm]	-16,22	-12,50	-9,17	-1,85	-4,22	-9,23
Baranov	Máximo [cm]	-15,82	-2,04	11,40	19,93	7,87	19,93
	Mínimo [cm]	-16,77	-20,17	-19,63	-10,63	-6,62	-20,17
	Promedio [cm]	-16,24	-10,75	-1,63	5,77	-2,43	-5,03
Ledersteger	Máximo [cm]	-13,75	9,64	22,90	22,26	19,20	22,90
	Mínimo [cm]	-16,73	-16,49	-7,60	0,08	-6,44	-16,73
	Promedio [cm]	-16,21	-9,07	-0,44	7,04	-0,42	-4,11

La correcciones más pequeñas se obtienen con el modelo de Baranov, éstas presentan las menores amplitudes (entre -20 cm y +20 cm) y más del [70%] están entre 0 cm y +20 cm; no obstante, debe tenerse presente que esta formulación no incluye reducciones de la gravedad y g_m se calcula independientemente de la altura del punto estudiado. En el sistema de Ledersteger también se aprecia la dependencia de la corrección ortométrica con respecto a la topografía [ver Anexo], pero dada la introducción de una altura media y un valor de gravedad de referencia, su comportamiento es mucho más suave que el de las demás aproximaciones [ver Anexo].

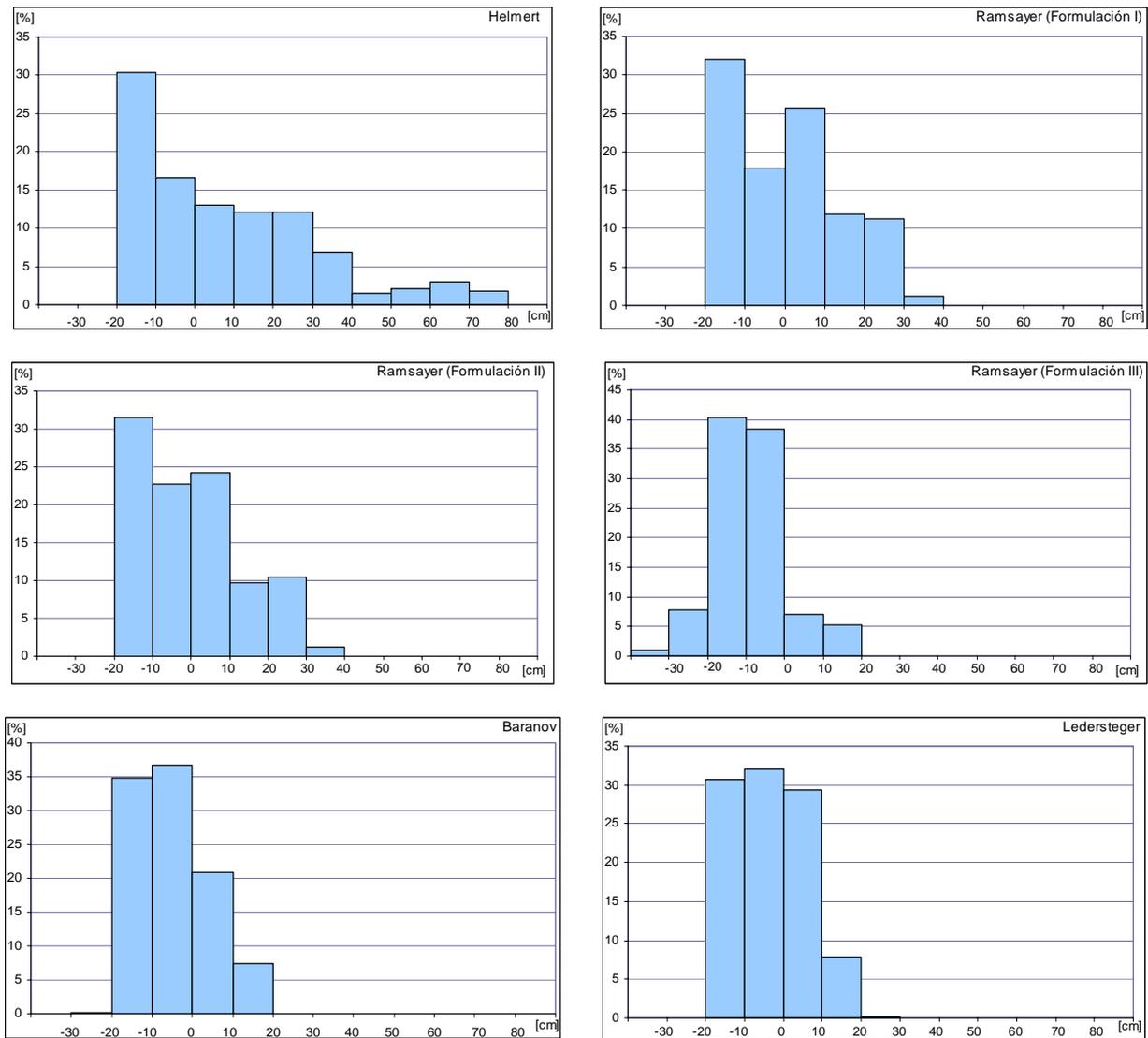


Figura 11. Histogramas de las correcciones ortométricas obtenidas según diferentes métodos para la estimación del valor medio de gravedad

c. Alturas normales

Las correcciones para la obtención de alturas normales según Molodenski, Vignal y Hirvonen están en el mismo orden, las diferencias entre ellas son tan pequeñas que pueden ser omitidas (tabla 8).

Tabla 8. Comparación de las alturas normales según Molodenski, Vignal y Hirvonen

Idicador	Molodenski - Vignal	Molodenski - Hirvonen	Vignal - Hirvonen
Máximo [cm]	+0,0283	+0,0076	+0,0002
Mínimo [cm]	+0,0000	-0,0044	-0,0276
Promedio [cm]	+0,0064	+0,0001	-0,0063

La corrección según Molodenski (v. g. Vignal y Hirvonen) varía entre -16,75 cm y +37,45 cm, con un promedio de +0,65 cm (tabla 9). La mayoría de los valores de corrección [95%] oscila entre -20 cm y +20 cm (figura 12), presentándose los más altos en las áreas montañosas más prominentes (ver Anexo).

Tabla 9. Indicadores estadísticos de las correcciones normales

Corrección	Indicador	Circuito I	Circuito II	Circuito III	Circuito IV	Circuito V	Total
Molodenski	Máximo [cm]	-14,74	16,80	37,45	32,74	24,36	37,45
	Mínimo [cm]	-16,75	-16,16	-4,73	1,36	-6,19	-16,75
	Promedio [cm]	-16,15	-7,96	6,31	11,49	1,12	-0,65
Vignal	Máximo [cm]	-14,74	16,78	37,42	32,71	24,34	37,42
	Mínimo [cm]	-16,75	-16,16	-4,74	1,35	-6,19	-16,75
	Promedio [cm]	-16,15	-7,96	6,30	11,48	1,12	-0,65
Bomford	Máximo [cm]	-16,18	-12,76	-9,48	-35,47	-6,47	-6,47
	Mínimo [cm]	-99,32	-694,08	-949,36	-867,18	-610,38	-949,36
	Promedio [cm]	-35,67	-131,65	-319,68	-331,34	-180,62	-208,99
Hirvonen	Máximo [cm]	-14,74	16,80	37,45	32,74	24,36	37,45
	Mínimo [cm]	-16,75	-16,16	-4,73	1,36	-6,19	-16,75
	Promedio [cm]	-16,15	-7,96	6,31	11,49	1,12	-0,65

Las correcciones calculadas según la aproximación de Bomford son mucho mayores que las anteriores, éstas alcanzan valores entre -949,36 cm y -6,47 cm, su comportamiento es similar al de las correcciones dinámicas, dado que también dependen del valor de gravedad teórica en una latitud constante.

3.4 Comparación de las diferentes alturas físicas evaluadas

En el presente ejercicio se obtienen alturas físicas (dinámicas, ortométricas y normales) a partir de números geopotenciales; es decir que se elimina el error de cierre teórico y éstas pueden ser determinadas independientemente del trayecto de nivelación. Su precisión está sólo en función de las diferencias de altura medidas y de los valores de gravedad utilizados. Sin embargo, cada tipo de alturas presenta características singulares que los hacen convenientes o inconvenientes para determinados campos de aplicación. De acuerdo con esto, en esta sección, se describen los aspectos más importantes de las alturas físicas analizadas, de modo que pueda identificarse cuál de ellas es la más adecuada en cada país de América del Sur.

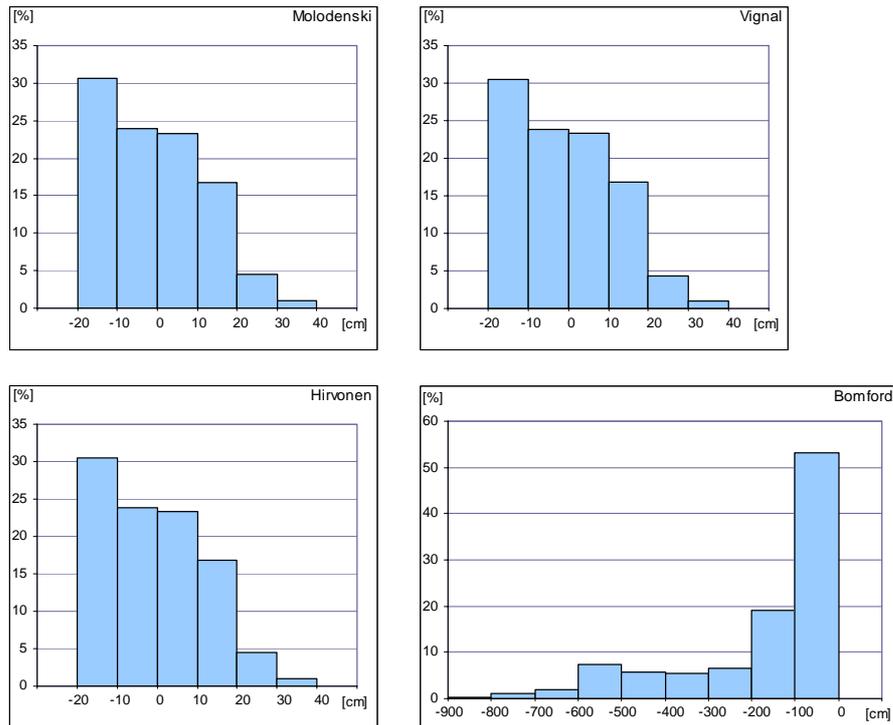


Figura 12. Histogramas de las correcciones normales obtenidas a partir de diferentes aproximaciones numéricas

Las alturas dinámicas tienen dos desventajas principales: en primera instancia, éstas no tienen significado geométrico y por tanto no pueden representarse como una distancia entre dos puntos (el punto de cálculo y el correspondiente sobre la superficie de referencia). Como consecuencia, éstas no tienen una relación matemática directa con las alturas elipsoidales, las cuales, son el vínculo geométrico con el sistema de referencia geocéntrico convencional. La segunda desventaja radica en la magnitud de sus correcciones, las cuales son especialmente altas en regiones extensas en dirección norte-sur, como Suramérica. A pesar de que podría definirse una latitud de referencia media más adecuada que las utilizadas en este documento, las correcciones para las zonas extremas (al norte Venezuela y Colombia, y al sur Chile y Argentina) serían tan altas, que su aplicación sería indispensable en cualquier tipo de nivelación, incluso en las de bajo orden.

Las alturas ortométricas, al contrario de las dinámicas, son geoméricamente interpretables y se relacionan con las alturas elipsoidales a través del geoide; no obstante, dado el conocimiento inexacto de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada, su determinación puede ser sólo aproximativa. Las diferentes formulaciones utilizadas para la estimación del valor medio de gravedad g_m conducen a diferentes “geoides”, los cuales se conocen como “cogeoides”. Éstos son muy cercanos al geoide, pero no corresponden a una superficie equipotencial. En este sentido, es necesario que el geoide utilizado como superficie de referencia para las alturas ortométricas sea calculado siguiendo hipótesis idénticas a las introducidas en la determinación de aquéllas o de sus correcciones. Aún cuando las alturas

ortométricas pudiesen estimarse con mayor precisión, el conocimiento sobre los datos requeridos en la formulación de las hipótesis correspondientes (distribución de masas, densidades, compensación isostática, etc.) cambia permanentemente, lo que exigiría que con cada nuevo aporte, se calculara, una vez más, tanto el geoide, como las alturas ortométricas, haciendo que su validez en el tiempo sea tan corta que no puedan asumirse como sistema de referencia.

De los diferentes métodos evaluados en el presente ejercicio, el que más se ajusta a la definición teórica estricta de las alturas ortométricas es el denominado *alturas modificadas de Niethammer*, el cual, a su vez, es el que más suposiciones requiere sobre la distribución interna de masas, pues incluye la compensación isostática. Los métodos de Mader, Mueller y Niethammer (simple) se diferencian entre sí, sólo en el cálculo de la corrección por terreno, el cual se facilita con la ayuda de un modelo digital de relieve. Sin embargo, su precisión sigue dependiendo del conocimiento exacto de la densidad de masas y de la bondad con que el modelo digital de relieve representa la fuerte topografía en áreas montañosas como Los Andes.

El modelo de Ramsayer es el más fácil de evaluar numéricamente; no obstante, la consideración de una altura de referencia y un valor de gravedad patrón hacen que su aplicabilidad sea efectiva en redes pequeñas y no en áreas extensas como América del Sur. Las aproximaciones de Baranov y Ledersteger no siguen estrictamente la definición teórica de las alturas ortométricas, éstos se concentran en proveer valores pequeños de corrección.

Considerando que el significado de las alturas ortométricas está estrechamente relacionado con el geoide, se prefiere que dichas alturas sean determinadas con la menor cantidad posible de hipótesis, de modo que la realización de su superficie de referencia pueda acercarse más al geoide. Bajo este criterio, la formulación de Helmert es la más adecuada, amén que genere las correcciones de mayor magnitud.

Las alturas normales son estimables sin la introducción de hipótesis sobre la distribución interna de masas y, además, tienen una relación directa con las alturas elipsoidales. Sin embargo, su superficie de referencia (el cuasigeoide) no es una equipotencial y por tanto, no tiene algún significado físico. Este inconveniente se presenta sólo en áreas continentales, pues en el océano y las zonas costeras (donde los sistemas clásicos de alturas se han definido) el geoide y el cuasigeoide son iguales. Desde este punto de vista, las alturas ortométricas no tienen ventaja sobre las normales, dado que la aproximación al geoide (el cogeide) tampoco es una superficie equipotencial.

De los métodos analizados, se prefiere el formulado por Molodenski, ya que las correcciones de Bomford se comportan como las dinámicas y las aproximaciones de Vignal y Hirvonen son sólo variaciones de aquél, que buscan agilizar la evaluación numérica correspondiente.

La tabla 10 muestra una comparación de los diferentes tipos de alturas físicas en relación con las principales características de un sistema vertical de referencia (comparar con Leismann et al. 1992).

Tabla 10. Comparación de los diferentes tipos de alturas físicas

Características	Tipo de altura		
	Dinámica	Ortométrica	Normal
<u>Unicidad</u> Las alturas de los puntos deben ser unívocas, es decir, independientes del trayecto de nivelación.	☺	☺	☺
<u>Superficie vertical de referencia</u> Ésta debe ser independiente del cálculo de las alturas y tener significado físico.	☹	☺	☹
<u>Interpretación geométrica</u> Las alturas deben ser interpretables geoméricamente, es decir, que deben representar la distancia vertical entre dos puntos (el del cálculo y el correspondiente sobre la superficie de referencia).	☹	☺	☺
<u>Unidades de medida de distancia</u> Para las aplicaciones prácticas, las alturas deben expresarse en unidades de medida de longitudes (o distancias).	☺	☺	☺
<u>Idéntica altura para puntos sobre la misma superficie equipotencial</u> Dos puntos deben tener el mismo valor de altura, si entre ellos el agua no <i>fluye</i> .	☺	☹	☹
<u>Formulación de hipótesis</u> Las alturas deben calcularse sin la introducción de suposiciones sobre la estructura interna de la Tierra	☺	☹	☺
<u>Relación con las alturas elipsoidales</u> Las alturas físicas deben ser compatibles con el sistema de referencia geocéntrico convencional.	☹	☺	☺
<u>Correcciones de magnitudes pequeñas</u> Para aplicaciones prácticas, las correcciones deben ser lo más pequeñas posible, de modo que puedan ser omitidas eventualmente.	☹	☺	☺

4. CONCLUSIONES Y ACTIVIDADES FUTURAS

Las correcciones aplicables a la nivelación geométrica alcanzan valores de varios decímetros, haciendo que su omisión imposibilite la combinación de los sistemas de alturas existentes en América del Sur con las técnicas modernas de posicionamiento satelital. En este sentido, el proyecto SIRGAS se preocupa por la definición, realización y adopción de un sistema vertical de referencia moderno, el cual, requiere del desarrollo de actividades específicas, tanto a nivel individual en cada país, como a nivel regional. Dichas actividades pueden resumirse en:

a. Redes de nivelación

Las diferencias de altura medidas en cada país deben estar disponibles en formato digital, éstas no deben contener algún ajuste previo, de ser así, el efecto del campo de gravedad estaría asumiéndose como error de observación y las diferencias de nivel no representarían la realidad. Junto con el desnivel observado entre puntos consecutivos, se requiere la distancia entre ellos, el año de medición y las correcciones sistemáticas aplicadas (p. ej. correcciones por refracción).

El ajuste *a priori* de los circuitos considerados en el presente ejercicio muestra errores de cierre que superan la condición $\pm 4\text{mm}\sqrt{s}$, justo en aquellos segmentos de la nivelación donde se incluyen mediciones de varias épocas (hasta 30 años de diferencia); desde este punto de vista, podría decirse que los movimientos verticales probables de la corteza terrestre se están asumiendo como errores de medición. En este sentido, las líneas niveladas en varias oportunidades son de especial importancia, pues a partir del análisis de sus mediciones repetitivas es posible distinguir de los errores de observación las variaciones de altura generadas por movimientos verticales. Este análisis debe ser complementado con posicionamiento satelital en puntos de nivelación, ya que las variaciones temporales son más fáciles de identificar en las alturas elipsoidales. Bajo este marco, es necesario que todas las diferencias de nivel medidas en los países de América del Sur sean reducidas a una sola época de referencia.

b. Números geopotenciales

El cálculo de números geopotenciales requiere de la interpolación de valores de gravedad superficiales, cuya precisión depende de la calidad y densificación de los puntos de gravedad disponibles. Amén que todos los países de la región cuentan con estaciones absolutas y redes gravimétricas de primer orden como densificaciones de RELANG, aún existen valores de gravedad asociados al sistema Potsdam, las cuales deben ser actualizados antes de proceder con la interpolación. En este sentido, es importante que cada país adelante un inventario de la información gravimétrica existente, incluyendo la proveniente de proyectos geofísicos, y que analice, tanto su sistema de referencia, como su calidad. Los datos de gravedad depurados, además de servir para el cálculo de los números geopotenciales, son de especial importancia para la determinación de un geoide (o cuasigeoide) gravimétrico de alta resolución.

Los números geopotenciales calculados en este ejercicio se refieren al nivel W_0 realizado por el mareógrafo colombiano de Buenaventura, similarmente, los números geopotenciales que se calculen en cada país de la región se referirán al nivel realizado por el mareógrafo local. Dado que la diferencia entre estos niveles (W_0^i) no es conocida, se necesita de la vinculación, mediante nivelación geométrica, de las redes de primer orden entre países vecinos. Las diferencias de potencial obtenidas harían posible un ajuste continental de los números geopotenciales correspondientes a la redes de nivelación fundamentales.

A pesar de que con el procedimiento anterior se unifica el nivel de referencia W_0 para los países de la región, éste continuaría siendo *local* para América del Sur; de allí, es necesario que cada mareógrafo de referencia se vincule a un sistema global, esto se traduce en la determinación de la SSTop en cada uno de ellos, durante la época de definición del nivel medio del mar correspondiente.

c. Alturas físicas

Los números geopotenciales, ajustados en una sola red continental y referidos a un nivel W_0 global, deben ser representados en unidades métricas de longitud, es decir que deben transformarse en alturas físicas. La principal desventaja de las alturas ortométricas es su dependencia de las hipótesis asociadas al gradiente vertical de la gravedad y a la distribución interna de masas terrestres. Éstas no son calculables directamente a partir de los datos medidos sobre la superficie terrestre y siempre representan alturas *irreales*. Como ventaja sobre las alturas normales, las ortométricas se refieren a una superficie vertical con significado físico (el geode), el cual, no obstante, también requiere de la formulación de hipótesis similares, haciendo que su realización difiera según el método de reducción utilizado. De otra parte, a pesar de que el cuasigeoide en las áreas continentales no corresponde con una equipotencial, bajo la definición clásica de altura como *la distancia al nivel medio del mar*, las alturas normales presentan un comportamiento equiparable al de las ortométricas. Adicionalmente, éstas pueden estimarse unívocamente a partir de observaciones gravimétricas sobre la superficie de la Tierra y el campo normal de gravedad, el cual no requiere de suposiciones.

Por lo anterior y, teniendo presente los resultados numéricos obtenidos, podría decirse que las alturas normales de Molodenski ofrecen las mejores condiciones para constituir la componente física del nuevo sistema vertical de referencia para América del Sur.

d. Superficie de referencia

La superficie de referencia de las alturas normales es el cuasigeoide, el cual también deber tener un carácter continental. Los cálculos de (cuasi-)geoides individuales país por país no satisfacen la condición de unicidad impuesta por un sistema vertical moderno, éste debe ser calculado de manera unificada a nivel regional. Su nivel global se obtiene mediante la componente proveniente de un modelo global de gravedad, compatible con el valor de

referencia W_0 derivado, preferiblemente, de datos satelitales; sus longitudes de onda largas son detalladas con las altas frecuencias de las anomalías locales de gravedad.

REFERENCIAS

Bodemüller, H. (1957). *Beitrag zur Schwerereduktion geometrischer Nivellements*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft 26, München.

Boedecker, G, Fritzer, Th. (1986). *International Absolute Gravity Basestation Network*. Veröffentlichung Bayerischer Kommission für die Internationale Erdmessung. Astro.-Geod. Arb. 47, München.

Drewes, H. (1976). *Berechnung regionaler Geoidundulationen durch gravimetrisches Nivellement mit Prädiktion der Schwereanomalien*. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover, Heft 63, Hannover.

Drewes, H., Sánchez, L., Blitzkow, D., Freitas, S. (2002). *Scientific foundations of the SIRGAS vertical reference system*. In: IAG Symposium on Vertical Reference Systems, Cartagena, Colombia, February 20-32, 2001. Springer, S. 297-301.

García J., E. Cuervo (1978). *Pronóstico de pleamares y bajamares en la costa occidental de Colombia para el año de 1978*. IGAC, Bogotá.

Heiskanen, W and Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. W. H. Freeman, San Francisco

IGAC (1960). *Nivelación geodésica, resultados definitivos : puntos y cotas. Resolución 1155 del 25 de septiembre de 1965*, por la cual se adoptan altitudes básicas para fines catográficos y geofísicos. Publicación PE No. 13 IGAC, Instituto Geográfico Agustín Codazzi, Bogotá.

Krakiwsky, E. J. and Mueller, I. (1965). *Systems of Heights*. Reports of the Department of Geodetic Science, Report No. 60, The Ohio State University, Research Foundation, Columbus, Ohio.

Kuhn, M. (2002). *Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen*. DGK, Reihe C, Hef Nr. 520, München.

Ledersteger, K. (1956). *Die Minimalsysteme der metrischen Reduktion*. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie 44, S. 43-50.

Ledersteger, K. (1958). *Die Berechnung der vertikalen dynamischen Korrekturen*. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie 46, S. 129-136.

Leismann, M., Klees, R., Beckers, H. (1992). *Untersuchungen verschiedener Höhensysteme, dargestellt an einer Testschleife in Reihnland-Pfalz*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft 296, München.

Magnizki, W. A., Browar, W. W., Schimbirew, B. P. (1964). *Theorie der Figur der Erde*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, New York.

- McConnell, R. K., Escobar, R. K, et al. (1995). *Progreso reciente en el desarrollo de la red latinoamericana de gravedad 1995*. Instituto Panamericano de Geografía e Historia (IPGH). III Reunión Técnica de la Comisión de Geofísica, México.
- Moritz, H. (1980). *Geodetic Reference System 1980*. Bull. Géod. 54. S. 395-405.
- Niethammer, Th. (1932). *Nivellement uns Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen*. Veröffentlichung der Schweizerischen Geodätischen Kommission, Birkhäuser & Cia., Basel.
- Ramsayer, K. (1953). *Die Schwerereduktion von Nivellements*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft 6, München.
- Ramsayer, K. (1954). *Vergleich verschiedener Schwerereduktionen von Nivellements*. Zeitschrift für Vermessungswesen 79, S. 140-150.
- Sakatow, P. S. (1957). *Lehrbuch der höheren Geodäsie*. VEB Verlag Technik Berlin, Berlin.
- Sánchez, L. (1996). *Sistema gravimétrico nacional de referencia*. Revista Cartográfica. Marzo, S. 11-20, Bogotá.
- Sánchez, L. (2003). *Bestimmung der Höhenreferenzfläche für Kolumbien*. Diplomarbeit. Institut für Planetare Geodäsie, Technische Universität Dresden, 82 p.
- Torge, W. (2001). *Geodesy*. 3rd edition, De Gruyter, Berlin, New York

ANEXO: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS PERFILES DE NIVELACIÓN Y LAS CORRECCIONES DINÁMICAS, ORTOMÉTRICAS Y NORMALES CORRESPONDIENTES.